Unit 6. プラズマの運動論

流体近似では Maxwell 分布を仮定し、モーメント ($\mathbf{u}$, p, n, T) を使った記述を行った。

高温プラズマでは衝突が少ないので局所的非熱平衡状態が保たれる可能性がある。

運動論では速度分布関数 f($\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$, t)を用いた記述をする。速度分布が Maxwell 分布ではない場合や波動-粒子相互作用が重要な場合 ($v \cong \omega/k$) は運動論的記述が必要となる。その基本となるのが Unit 2 で紹介した Vlasov-Maxwell 方程式系である。

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}\right)\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0 \qquad (\alpha = e, i)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 1/c^2\, \partial \mathbf{E}/\partial t + \mu_0 \mathbf{J} \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \sigma_e/\varepsilon_0$$

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v}\, f_\alpha\, d^3\mathbf{v} \qquad \sigma_e = \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha\, d^3\mathbf{v}$$

<u>プラズマ波動に対する運動論効果</u>

一様プラズマ中の小振幅高周波静電波動 $\mathbf{E}(x,t) = \hat{\mathbf{x}}\hat{E}\exp(ikx - i\omega t)$ を考える。電子の Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m}E\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

$f(x, v, t) = f_0(v) + f_1(x, v, t)$とすると線形化された Vlasov 方程式および Poisson 方程式は

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{e}{m}E\frac{\partial f_0}{\partial v} = 0$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial x} = -e\int_{-\infty}^{\infty} f_1\, dv$$

$f_1(x,v,t) = \hat{f}_1(v)\exp(ikx - i\omega t)$ と書けると仮定すると

$$-i(\omega - kv)\hat{f}_1 = \frac{e}{m}\hat{E}\frac{\partial f_0}{\partial v} \quad \to \quad \hat{f}_1 = \frac{ie}{m}\hat{E}\frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv}$$

これを Poisson 方程式に代入すると

$$ik\varepsilon_0\hat{E} = -e\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_1\, dv = -\frac{ie^2}{m}\hat{E}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv}\, dv$$

これより以下の分散関係を得る。

$$D(k,\omega) \equiv 1 + \frac{e^2}{mk\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv}\, dv = 0$$

D(k, ω)は plasma dispersion function あるいは plasma dielectric function と呼ばれる。

Electron Plasma Wave の熱効果

$\frac{\omega}{k} >> v$ の場合 (adiabatic)　(この場合は運動論効果は重要でない。)

$$\frac{1}{\omega - kv} = \frac{1}{\omega} + \frac{kv}{\omega^2} + \frac{k^2 v^2}{\omega^3} + \frac{k^3 v^3}{\omega^4} + \cdots$$

これに $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv$ を作用させると、v の偶数次の項は 0 となり、分散関係として次式を得る。

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2 v_t{}^2}{\omega^2}\right) = 0$$

これを書き直すと、$\omega^2 \cong \omega_p{}^2 + 3k^2 v_t{}^2$ となり流体近似で導いたのと同じ結果となる。

Landau 減衰

$v \cong \frac{\omega}{k}$ の粒子があるときは、この特異点 (Landau resonance) の正しい取り扱いが必要。

線形微分方程式を初期値問題として解くとき、Laplace 変換を使う (時間依存性を $e^{-i\omega t}$ と仮定しない)。

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt \qquad (t \to \infty \text{で積分が収束するように、} Re(s) \geq s_0 \text{でのみ定義される})$$

$$\tilde{\dot{f}}(s) = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

f(0)は t = 0 での初期値である。Laplace 逆変換は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st}\tilde{f}(s) ds$$

ここで積分路 C は $s_0 - i\infty$ より $s_0 + i\infty$ とする。但し $\tilde{f}(s)$ が発散しないために、積分路 C が $\tilde{f}(s)$ の全ての特異点の右側を通るように s_0 を選ぶ。

具体的な例として、一様プラズマ中の静電波を考える。

$$E(x, t) = \hat{E}(t) \exp(ikx)$$

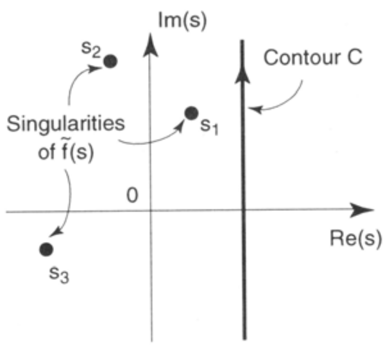
$$f_1(x, v, t) = \hat{f}_1(v, t) \exp(ikx)$$

線形化された Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + ikvf_1 - \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0$$

これを Laplace 変換すると

$$(s + ikv)\tilde{f}_1(v, s) - \frac{e}{m}\tilde{E}(s)\frac{\partial f_0}{\partial v} = f_1(v, 0)$$



Laplace 逆変換の積分路

$\tilde{f}_1(v,s)$ について解き、線形化された Poisson 方程式

$$ik\varepsilon_0\tilde{E}(s) = -e\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}_1(v,s)\,dv$$

に代入して次式を得る。

$$D(k,s)\tilde{E}(s) = \frac{ie}{k\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1(v,0)}{s+ikv}dv \equiv N(k,s) \quad\rightarrow\quad \tilde{E}(s) = \frac{N(k,s)}{D(k,s)}$$

但し

$$D(k,s) \equiv 1 - \frac{ie^2}{mk\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0/\partial v}{s+ikv}dv$$

電場を求めるため、Laplace 逆変換を行う。

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{st}\tilde{E}(s)ds$$

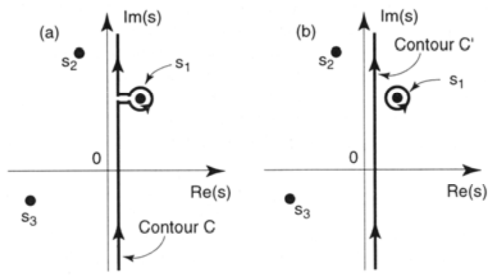
$\tilde{E}(s)$ の特異点は D(k,s) = 0 となるところに現われる。この中で、Re(s)の一番大きいものを s_1 とする。

⑴　$Re(s_1) > 0$ の場合　instability

$$E(t) = Res(s_1)\,e^{s_1 t} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{st}\tilde{E}(s)ds \qquad Res(s_1)は\ s_1\ における留数$$

$t\rightarrow\infty$では留数の項が支配的となるため $E(t)\rightarrow\ Res(s_1)\,e^{s_1 t}$

$Re(s_1) > 0$ なので、この項は不安定性を表す。



$Re(s_1) > 0$ の場合の積分経路の変形

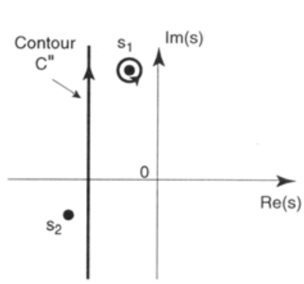
⑵　$Re(s_1) << 0$ の場合　strong damping

同様に

$$E(t) = Res(s_1)\,e^{s_1 t} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C''} e^{st}\tilde{E}(s)ds$$

$t\rightarrow\infty$では $E(t)\rightarrow\ Res(s_1)\,e^{s_1 t}$

$Re(s_1) < 0$ なので減衰を表す。



$Re(s_1) << 0$ の場合の積分経路の変形

⑶　$Re(s_1) \leq 0$ の場合　weak damping

$s = -i\omega$とすると

$$D(k,\omega) \equiv 1 + \frac{e^2}{mk\varepsilon_0}\left(\Pr\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv}dv - \frac{\pi i}{k}\left.\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|_{v=\omega/k}\right)$$

$\omega >> kv_t$とすると

$$D(k,\omega) \cong 1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2} - \frac{\pi i e^2}{mk^2\varepsilon_0}\left.\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|_{v=\omega/k}$$

D(k,ω) = 0 をωの虚部が実部に対して小さいという仮定のもとに解くと、

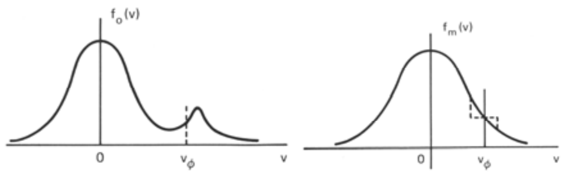
$$\omega \cong \omega_p + \frac{\pi i \omega_p{}^3}{2nk^2} \left.\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|_{v=\omega/k}$$

$\left.\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|_{v=\omega/k} > 0$ であれば不安定性（増幅）、$\left.\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|_{v=\omega/k} < 0$ であれば減衰を表す。

Maxwell 分布の場合

$$\omega \cong \omega_p - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_p{}^4}{k^3 v_t{}^3}\exp\left(-\frac{\omega_p{}^2}{2k^2 v_t{}^2}\right)$$

これを Landau damping という。



$v = v_\phi$ (= ω/k)で増幅　　$v = v_\phi$ (= ω/k)で減衰

Landau damping の物理的意味

v ≅ ω/k の共鳴粒子は静的電場を感じるため、波と効率よくエネルギー交換できる。波との位相差により加速または減速される。Maxwell 分布の場合、$\left.\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|_{v=\omega/k} < 0$ なので、波により加速される粒子の方が減速される粒子より多い。このためエネルギーは波から粒子に移る。

Landau damping は散逸が無くても起こり得るので、可逆的である。 → plasma echo

Ion acoustic wave と ion Landau damping

イオンの寄与を考慮すると

$$D(k,\omega) \equiv 1 + \sum_{e,i}\frac{e^2}{mk\varepsilon_0}\left(\Pr\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv}dv - \frac{\pi i}{k}\left.\frac{\partial f_0}{\partial v}\right|_{v=\omega/k}\right)$$

$v_{ti} << \omega/k << v_{te}$ の条件下では

$$\Pr\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv}dv \cong \begin{cases} \dfrac{n}{kv_{te}{}^2} & \text{(electron)} \\ -\dfrac{nk}{\omega^2} & \text{(ion)} \end{cases}$$ であるから、

$$D(k,\omega) \cong 1 + \frac{\omega_p{}^2}{k^2 v_{te}{}^2} - \frac{\Omega_p{}^2}{\omega^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\omega_p{}^2\omega}{k^3 v_{te}{}^3} + \frac{\Omega_p{}^2\omega}{k^3 v_{ti}{}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{ti}{}^2}\right)\right]$$

$k\lambda_D = kv_{te}/\omega << 1$ であれば $\omega = kc_s + i\gamma$　（$|\gamma| << \omega$）とすると

$$\gamma = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\omega^2}{kv_{te}} + \frac{T_e}{T_i}\frac{\omega^2}{kv_{ti}}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{ti}{}^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}kc_s\left[\sqrt{\frac{m}{M}} + \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{T_e}{2T_i}\right)\right]$$

電子によるLandau damping（第１項）は常に小さいが、イオンによるLandau damping（第２項）は $T_e >> T_i$ の場合にのみ小さい。