Unit 5. 流体プラズマ中の不安定性

平衡状態に摂動を与えたとき、摂動が成長すれば不安定。

Rayleigh-Taylor 不安定性

プラズマが磁場によって支えられており、これに重力が働いている場合を考える。

$\mathbf{B}_0$ は z 方向、∇p_0, $\nabla \rho_0$ は y 方向、$\mathbf{g}$, ∇B_0 は−y 方向を向いているとする。

解析的に解くため、質量密度分布は $\rho_0 \propto \exp\left(\frac{y}{s}\right)$ とする。

0 次の圧力平衡は $\frac{\partial}{\partial y}\left(p_0 + \frac{B_0{}^2}{2\mu_0}\right) + \rho_0 g = 0$

小振幅の摂動 $\psi = \hat{\psi}(y)\exp(ikx - i\omega t)$ を仮定し $(k_z = 0)$ 線形化すると、流体運動方程式は

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = \rho_1 \mathbf{g} - \nabla\left(p_1 + \frac{B_0 B_1}{\mu_0}\right)$$

これに $\mathbf{z}\cdot\nabla\times$ を作用させると

$$-i\omega\left(ik\rho_0 u_y - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 u_x)\right) = -ik\rho_1 g$$

非圧縮性条件 $\nabla\cdot\mathbf{u}_1 = iku_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$ より $u_x = \frac{i}{k}\frac{\partial u_y}{\partial y}$

連続の式 $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1\cdot\nabla\rho_0 = 0$ より $\rho_1 = \frac{\rho_0 u_y}{i\omega s}$

これらを運動方程式に代入して

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) - k^2\left(1 + \frac{g}{s\omega^2}\right)u_y = 0$$

プラズマの上下境界に導体壁があるという境界条件 $(y = 0, h$ で $u_y = 0)$ を使うと、固有関数は

$$u_y(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right)\exp\left(-\frac{y}{2s}\right) \qquad (n:\ 整数)$$

その固有値は

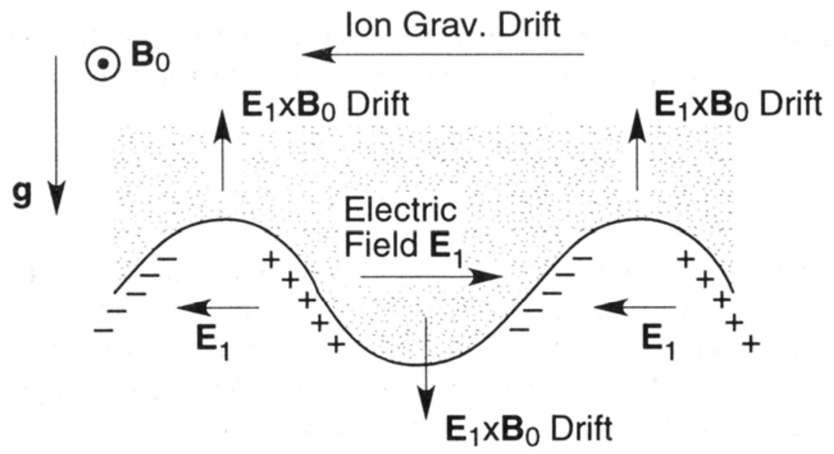
$$k^2\left(1 + \frac{g}{s\omega^2}\right) = -\frac{1}{4s^2} - \frac{n^2\pi^2}{h^2}$$

を満たす。これをωについて解くと

$$\omega = \pm i\left(\frac{g}{s}\frac{h^2k^2}{n^2\pi^2 + h^2k^2 + h^2/4s^2}\right)^{1/2}$$

摂動は成長率 $\gamma \equiv \mathrm{Im}(\omega)$ が正であれば成長、負であれば減衰する。

成長率が最大となるのは n = 1 で k が大きいときであり、このとき $\gamma = \sqrt{\frac{g}{s}}$



Rayleigh-Taylor 不安定性の原理

磁場の曲率によるフルート不安定性

磁場に曲率がある場合、curvature drift と∇B drift は次のように表される。

$$\mathbf{v}_d = \frac{M}{e}\left(\frac{v_\perp{}^2}{2} + v_{//}{}^2\right)\frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c{}^2 B^2}$$

Maxwell 分布について平均をとると

$$\left\langle v_{//}{}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{v_\perp{}^2}{2} \right\rangle = \frac{T}{M} = \frac{p}{\rho}$$

であるから、重力ドリフト

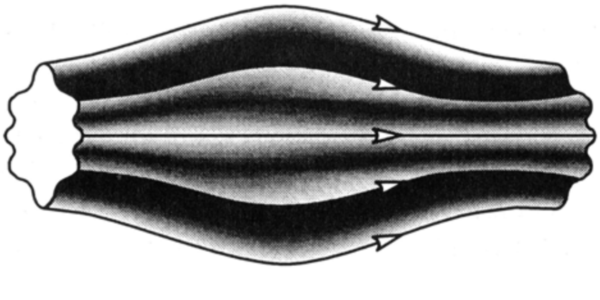
$$\mathbf{v}_d = \frac{M}{e}\frac{\mathbf{g}\times\mathbf{B}}{B^2}$$

と比較すると、実効的に重力 $g = \frac{2p}{\rho R_c}$ が働いていると考えることができる。

不安定性は $\mathbf{R}_c \cdot \nabla p < 0$ の時に起こる。

$\frac{|\nabla p|}{p} = \frac{1}{s}$ とすると成長率は

$$\gamma \approx \left(\frac{2|\nabla p|}{\rho R_c}\right)^{1/2} \approx \frac{c_s}{\sqrt{sR_c}}$$



フルート不安定性