

Unit 4. 流体プラズマ中の波動

線形波動

小振幅波動 → 方程式の線形化

指数表示を用い、その実数部をとる。

$$n_1 = \bar{n}_1 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \delta_n)]$$

\bar{n}_1 : 実振幅、 \mathbf{k} : 波数ベクトル ($k = 2\pi/\lambda$)、 δ_n : 位相

理想化した平面波を考える。 $\mathbf{k} = k\hat{x}$, $\delta_n = 0$ ととる。

$$n_1 = \bar{n}_1 \cos(k_x x - \omega t)$$

$$\mathbf{v}_p = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k} \quad \text{位相速度}$$

$\text{Re}(\omega) > 0$ ととる。 $\text{Im}(\omega) > 0$ は時間的成長、 $\text{Im}(\omega) < 0$ は減衰を表す。

$\text{Im}(\mathbf{k})$ は空間的成長・減衰を表す。

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$$

\mathbf{E}_1 : 複素振幅 (実振幅 + 実位相)

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \hat{x} + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \hat{y} + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \hat{z} \quad \text{群速度}$$

磁場のない場合

静電波 ($\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1$): $\nabla \times \mathbf{E}_1 = 0 \rightarrow \mathbf{B}$ の perturbation なし (\mathbf{E} のみの perturbation)

縦波の場合 $\mathbf{k} // \mathbf{E}_1 \rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = \omega \mathbf{B}_1 = 0$ なので electrostatic

Electron plasma wave

高周波 (速い時間スケール) → イオンの動きは無視できる

電子の流体方程式 ($\omega/k \cong v_{te}$ の場合は波動-粒子相互作用が重要 → Vlasov eq. が必要)

$$m n_e \left[\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e \right] = -en_e \mathbf{E} - \nabla p_e$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = e(n_i - n_e) \quad (Z = 1 \text{ の場合})$$

$u_0 = 0, E_0 = 0$ で $\mathbf{u}_e = u_e \hat{x}$, $\mathbf{E} = E \hat{x}$ の場合、1次までの項のみをとると

$$-i\omega m n_0 u_1 = -en_0 E_1 - ikp_1 = -en_0 E_1 - ik3Tn_1 \quad \text{1-D adiabatic } (\gamma = 3)$$

$$-i\omega n_1 + ikn_0 u_1 = 0$$

$$ik\epsilon_0 E_1 = -en_1$$

これらを連立して解くと

$$\frac{i\omega^2 mn_1}{k} = \frac{-e^2 n_0 n_1}{ik\epsilon_0} + ik3Tn_1$$

これより以下の波動を表す分散関係 $\omega = \omega(k)$ が導かれる。

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 \frac{T}{m} = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{te}^2 \quad \text{Bohm-Gross dispersion relation}$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad \omega_{pe} \text{ (または } \omega_p \text{)} : \text{電子プラズマ周波数}$$

Ion acoustic wave

低周波 → イオンの動きが重要 adiabatic ion, isothermal electron ($v_{ii} \ll \omega/k \ll v_{te}$)

$$Mn_i \left[\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i \right] = en_i \mathbf{E} - \nabla p_i$$

線形化して $-i\omega M n_{i0} u_{i1} = -en_{i0} ik \phi_1 - \gamma_i T_i ik n_{i1}$

電子は等温的なので Boltzmann 分布を保つ。

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e\phi_1}{T_e}\right) \cong n_{e0} \left(1 + \frac{e\phi_1}{T_e}\right) \rightarrow n_{e1} = n_{e0} \frac{e\phi_1}{T_e}$$

1 次の Poisson 方程式は

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \epsilon_0 k^2 \phi_1 = e(n_{i1} - n_{e1}) = e \left(n_{i1} - n_{e0} \frac{e\phi_1}{T_e} \right) \rightarrow n_{i1} = \left(n_{i0} \frac{e}{T_e} - \epsilon_0 \frac{k^2}{e} \right) \phi_1$$

連続方程式より

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0 \rightarrow i\omega n_{i1} = n_{i0} ik u_{i1}$$

運動方程式に代入して

$$\omega M n_{i0} \frac{\omega n_{i1}}{kn_{i0}} = \frac{en_{i0} kn_{i1}}{n_{i0} \frac{e}{T_e} - \epsilon_0 \frac{k^2}{e}} + \gamma_i T_i kn_{i1}$$

これより次の分散関係を得る。

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{T_e/M}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \frac{\gamma_i T_i}{M}$$

$$k\lambda_D \ll 1 \text{ では } \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{T_e + \gamma_i T_i}{M} = c_s^2 \quad c_s: \text{イオン音速} \quad T_e \gg T_i \text{ の場合 } c_s^2 = \frac{T_e}{M}$$

$$k\lambda_D \gg 1 \text{ では } \omega^2 = \frac{m}{M} \omega_{pe}^2 = \omega_{pi}^2 \quad \omega_{pi} \text{ (または } \Omega_p \text{)} : \text{イオンプラズマ周波数}$$

電磁波: $\nabla \times \mathbf{E}_1 \neq 0 \rightarrow \mathbf{B}$ の perturbation あり

横波 $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_1$ の場合、 $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \rightarrow \sigma_e = 0 \rightarrow n_{e1} = 0 \rightarrow p_{e1} = 0$ (非圧縮性)

Electromagnetic wave

Maxwell 方程式より

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1 - i\omega \frac{\mathbf{E}_1}{c^2}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = i\omega \mathbf{B}_1$$

$$\text{連立して解くと } -\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E}_1 = k^2 \mathbf{E}_1 - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\mathbf{E}_1 + i \frac{\mathbf{j}_1}{\epsilon_0 \omega} \right)$$

高周波 (イオンは動かない) とし、 $\mathbf{E}_0 = 0, \mathbf{B}_0 = 0, \mathbf{u}_0 = 0$ の場合を考える。

1 次の運動方程式より $-i\omega m \mathbf{u}_1 = -e \mathbf{E}_1$ 従って $\mathbf{j}_1 = -n_0 e \mathbf{u}_1 = -\frac{n_0 e^2 \mathbf{E}_1}{i\omega m}$

$$(c^2 k^2 - \omega^2) \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{\epsilon_0} \mathbf{j}_1 = -\frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0} \mathbf{E}_1 = -\omega_{pe}^2 \mathbf{E}_1$$

これが $\mathbf{E}_1 \neq 0$ の解を持つ条件より分散関係は

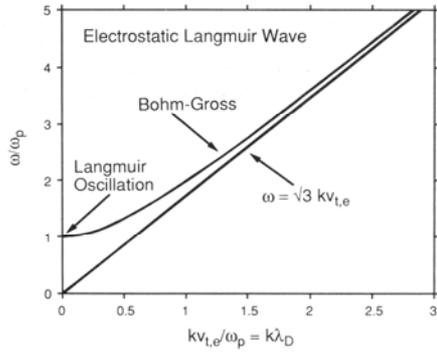
$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2 \rightarrow \omega = ck \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2 k^2} \right)^{1/2}$$

$\omega > \omega_{pe}$ で伝搬 $n < n_c = \frac{m \epsilon_0 \omega^2}{e^2}$ カットオフ密度 ($\omega_{pe} = \omega$ となる密度)

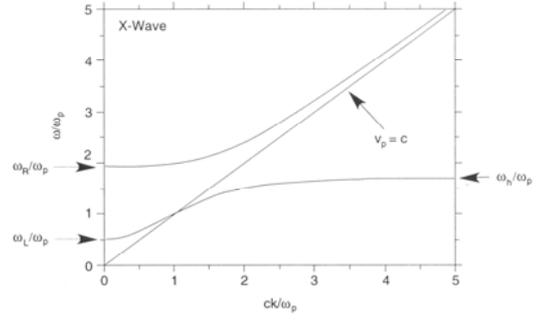
$$\omega < \omega_{pe} \text{ への浸透 } k = \frac{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)^{1/2}}{c} = \frac{\pm i(\omega_{pe}^2 - \omega^2)^{1/2}}{c}$$

$$\exp(ikx) = \exp \left[-\frac{(\omega_{pe}^2 - \omega^2)^{1/2}}{c} x \right] \rightarrow \text{浸透長 } \frac{c}{(\omega_{pe}^2 - \omega^2)^{1/2}}$$

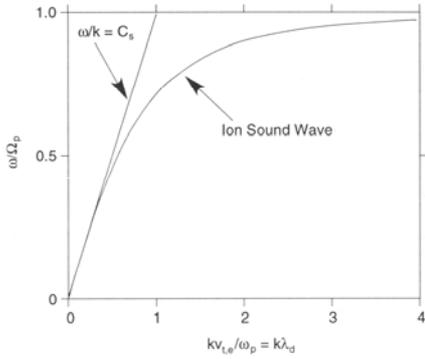
$\omega \ll \omega_{pe}$ の極限では c/ω_{pe} となり、これを collisionless skin depth と呼ぶ。



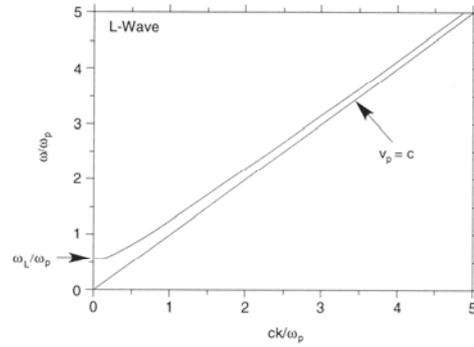
静電プラズマ波 ($B = 0$)



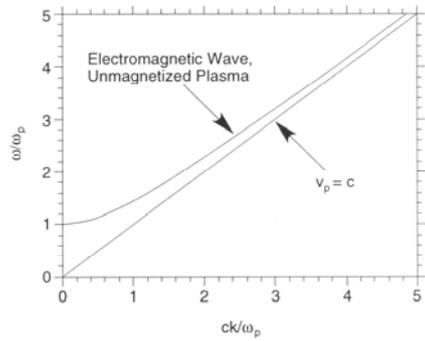
X 波 ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$, $\omega_c^2 = 2\omega_p^2$)



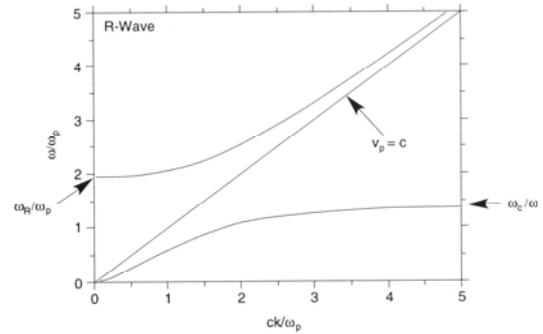
イオン音波 ($B = 0$)



L 波 ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$, $\omega_c^2 = 2\omega_p^2$)



電磁波 ($B = 0$)



R 波 ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$, $\omega_c^2 = 2\omega_p^2$)

プラズマ中の波動の分散関係

非線形波動

波動振幅が大きくなると非線形効果が重要となってくる。

Ion Acoustic Soliton

変数を規格化 $\frac{n_i}{n_0} = n$, $\frac{u_{ix}}{c_s} = u$, $\frac{x}{\lambda_D} = \xi$, $\omega_{pi}t = \tau$, $\frac{e\phi}{T_e} = \varphi$

$$\text{continuity eq. } \frac{\partial n}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}(nu) = 0$$

$$\text{ion eq. motion } \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$$

$$\text{el. eq. motion } \rightarrow \text{ Boltzmann 分布 } \frac{n_e}{n_0} = e^\varphi$$

$$\text{Poisson eq. } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = e^\varphi - n$$

ここで $n = 1 + n'$ とし、速度 c_s で動いている系に座標変換 $y = \xi - \tau$ すると

$$\frac{\partial n'}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(u - n' + n'u) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi - u) = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = n' - \varphi - \frac{\varphi^2}{2} - \dots$$

1 次の解は、 $|y| \rightarrow \infty$ で $\varphi, u, n' \rightarrow 0$ という境界条件を使うと $u = n' = \varphi$

2 次の方程式は

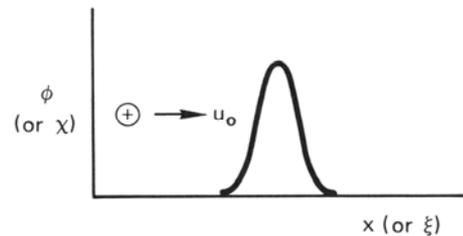
$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \quad \text{Korteweg-de Vries (K-dV) eq.}$$

第 2 項: nonlinear (急峻化)

第 3 項: dispersion (分散)

K-dV eq. は局在した解をもつ。

$$u = u_\infty + B \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - ct}{\delta}\right), \quad c = u_\infty + \frac{B}{3}, \quad \delta = \sqrt{\frac{6}{B}}$$



Soliton

非線形項による高調波の生成 $(\omega, k) \rightarrow (2\omega, 2k), (3\omega, 3k), \dots$

低次の高調波は線形波動の分散関係を満足するので成長する \rightarrow 波形の急峻化

高次の高調波は分散関係が $\omega = kc_s$ よりずれるため、抑制される。

非線形項による急峻化と高次項の分散効果のバランスにより安定な soliton 解が得られる。

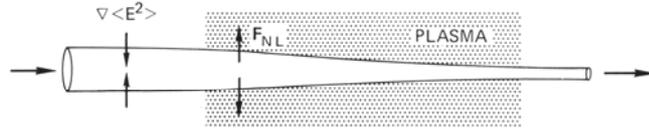
Ponderomotive Force

空間的に勾配を持つ電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cos(\omega_0 t)$ がある場合、 $\mathbf{r}(t) = \bar{\mathbf{r}} + \Delta\mathbf{r}(t)$ として

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\bar{\mathbf{r}}) + \Delta\mathbf{r}(t) \cdot \nabla \mathbf{E}_0(\bar{\mathbf{r}})$$

運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cos(\omega_0 t) + \Delta\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$



Ponderomotive 力によるレーザービームの自己収束

これを波動の周期 $2\pi/\omega_0$ で時間平均すると

$$m \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = -\frac{m}{2} \nabla |\Delta\mathbf{v}|^2 = -\frac{q^2}{4m\omega_0^2} \nabla |\mathbf{E}_0(\bar{\mathbf{r}})|^2$$

Ponderomotive force は常に粒子を電場の強い領域から追い出す方向に作用し、低周波数で軽い粒子ほど大きく影響を受ける。この力は電場の自乗に比例するので非線形力である。

Caviton and Envelope Soliton

Electron Plasma Wave (EPW)の場合、高調波は線形波動の分散関係を満足しないので、高調波の生成は重要ではない。線形波動を $A \cos(kx - \omega t)$ で表すと、2次の非線形項は

$$A^2 \cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2} A^2 [\cos(2kx - 2\omega t) + 1]$$

高調波生成 $k = 0, \omega = 0$

(重要でない) 空間的・時間的にほぼ一様なゆるやかな変調を起こす

EPW の波動方程式は線形近似で次のように表される。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{ex} + \omega_{pe}^2 u_{ex} - 3v_{te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{ex} = 0$$

$$(\omega_{pe}^2 \propto n_e) \quad (v_{te}^2 \propto T_e)$$

$k \rightarrow 0$ では第3項は無視できる(温度の変調に比べ、密度の変調が支配的となる)。

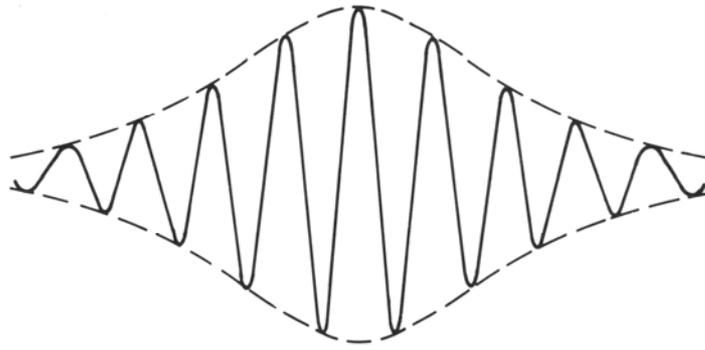
プラズマ密度が n_0 から $n_0 + \delta n_e(x, t)$ に変調されたとし、 δn_e の時間変化はプラズマ振動に比べ非常にゆっくりであるとする、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{ex} - 3v_{te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{ex} + \omega_{pe}^2 \left[1 + \frac{\delta n_e(x, t)}{n_0} \right] u_{ex} = 0$$

解を $u_{ex}(x, t) = u(x, t) \exp(-i\omega_{pe} t) + u^*(x, t) \exp(i\omega_{pe} t)$ と書き、 u の時間変化はゆっくりなので $\partial^2 u / \partial t^2$ を無視すると、

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{3}{2} \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \frac{\omega_{pe}}{2} \frac{\delta n_e(x, t)}{n_0} u(x, t) = 0$$

これは非線形な密度変化の項(第3項)をポテンシャルとした Schrödinger eq.の形をしている。ポテンシャルの窪みに捕捉された粒子に対応する解は、密度の窪みに捕捉された局在波を表す。この方程式の soliton 解は高周波で振動しているので envelope soliton と呼ばれる。



Envelope Soliton

次に $\delta n_e(x,t)$ を $u(x,t)$ で表すことを考える。電子の運動方程式を速い時間変化 (ω_{pe}) について平均し、 δn_e の変化するゆるやかな時間スケールの方程式を導く。

$$m_e \frac{\overline{\partial u_{ex}}}{\partial t} + m_e u_{ex} \frac{\partial}{\partial x} u_{ex} = -\frac{1}{n_e} \frac{\partial \overline{\phi_e}}{\partial x} + e \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x}$$

第1項は電子の慣性項で、時間変化がゆるやかな場合は無視できる。第2項は非線形項で

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m_e}{2} \overline{u_{ex}^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (m_e |u(x,t)|^2)$ と書け、ponderomotive force を表す。第3項は $-\frac{T_e}{n_0} \frac{\partial \delta n_e}{\partial x}$ と書けるので

$$\frac{\partial}{\partial x} (m_e |u(x,t)|^2) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_e}{n_0} \delta n_e - e \overline{\phi} \right)$$

$u(x,t) \rightarrow 0$ で $\delta n_e, \overline{\phi} \rightarrow 0$ という境界条件のもとに解くと

$$\frac{\delta n_e}{n_0} = \frac{e \overline{\phi} - m_e |u(x,t)|^2}{T_e}$$

最後に $\overline{\phi}$ を求めるためにイオンの運動方程式を解く。イオンは高周波の電子プラズマ振動に反応しないので線形近似が使える。

$$m_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = -e \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x} - \frac{1}{n_0} \frac{\partial}{\partial x} (n_i T_i)$$

十分ゆっくりな時間変化の場合、イオンの慣性項は無視でき、

$$e \overline{\phi} = -T_i \frac{\delta n_i}{n_0}$$

ゆっくりした時間変化の場合、更に $\delta n_i = \delta n_e$ が成り立つので、

$$\frac{\delta n_e}{n_0} = \frac{-m_e |u(x,t)|^2}{T_e + T_i}$$

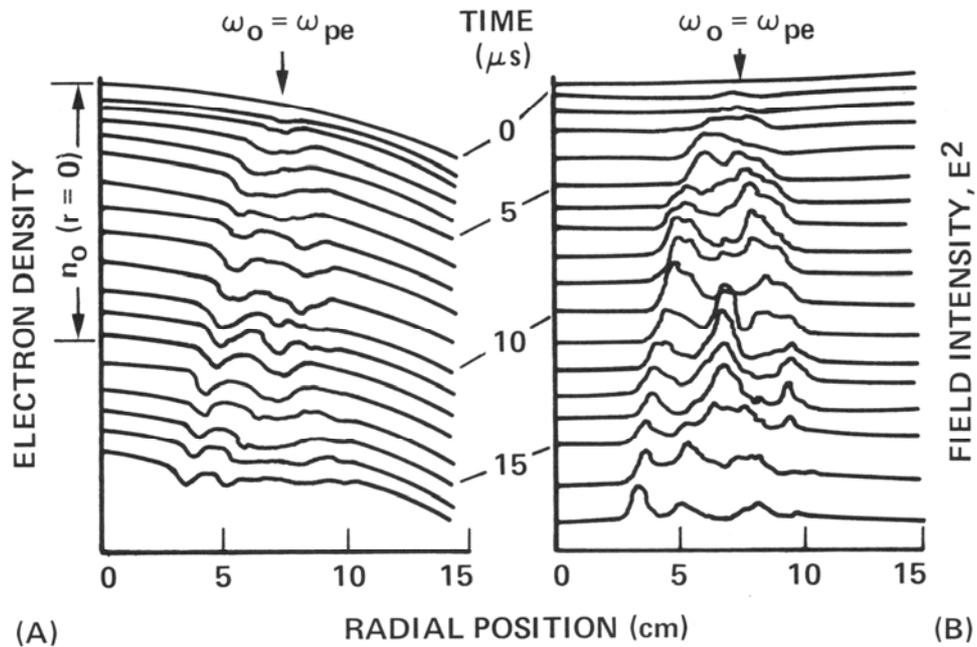
これより $u(x,t)$ に関する閉じた方程式が得られる。

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + \frac{3}{2} \frac{v_{te}^2}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + \frac{\omega_{pe}}{2} \frac{m_e}{T_e + T_i} |u(x,t)|^2 u(x,t) = 0$$

第2項: diffraction (局所化が進むと重要になる)

これを nonlinear Schrödinger eq. と呼ぶ。

電場の強いところに ponderomotive force により密度の窪みができる。この密度の窪みに電場が集中し、更に ponderomotive force は増強される。



(A) 低周波の密度の窪み (B) 高周波電場の強度

磁場のある場合

高周波電磁波

近似: cold plasma approximation ($T_e = T_i = 0$), イオンは動かない

磁場に垂直方向に伝搬する場合 ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$) $\mathbf{k} = k \hat{x}$, $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$

ordinary wave (O-mode) $\mathbf{E}_1 // \mathbf{B}_0$, $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{k} \rightarrow$ 磁場の無い場合と同じ

extraordinary wave (X-mode) $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$

$$-i\omega\mu_{x1} = -e(E_{x1} + u_{y1}B_0)$$

$$-i\omega\mu_{y1} = -e(E_{y1} - u_{x1}B_0)$$

連立して解くと

$$u_{x1} = \frac{e}{m} \frac{i\omega E_{x1} + \omega_c E_{y1}}{\omega_c^2 - \omega^2}$$

$$u_{y1} = \frac{e}{m} \frac{i\omega E_{y1} - \omega_c E_{x1}}{\omega_c^2 - \omega^2}$$

これを波動方程式に代入

$$k^2 \mathbf{E}_1 - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\mathbf{E}_1 + i \frac{\mathbf{j}_1}{\varepsilon_0 \omega} \right); \quad \mathbf{j}_1 = -n_0 e \mathbf{u}_1$$

$$(\omega_c^2 - \omega^2 + \omega_p^2) E_{x1} - i\omega_p^2 \frac{\omega_c}{\omega} E_{y1} = 0$$

$$i\omega_p^2 \frac{\omega_c}{\omega} E_{x1} + \left[\left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) (\omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2 \right] E_{y1} = 0$$

これが $\mathbf{E}_1 \neq 0$ の解を持つという条件 ($\det = 0$) から分散関係が導かれる。

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_p^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_h^2)}; \quad \omega_h^2 \equiv \omega_p^2 + \omega_c^2 \quad \omega_h: \text{upper hybrid frequency}$$

resonance ($k \rightarrow \infty$) $\omega = \omega_h$

$$\text{cutoff } (k \rightarrow 0) \quad \omega = \frac{\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} \pm \omega_c}{2} \equiv \omega_R \quad \omega_R: \text{right hand cutoff}$$
$$\omega_L \quad \omega_L: \text{left hand cutoff}$$

磁場に平行方向に伝搬する場合 ($\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$) $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$

電磁波 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$ ($\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_1$)

同様に $\mathbf{j}_1 = -n_0 e \mathbf{u}_1$ を波動方程式に代入して

$$i\omega_p^2 \frac{\omega_c}{\omega} E_{x1} + \left[\left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) (\omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2 \right] E_{y1} = 0$$

$$\left[\left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right) (\omega_c^2 - \omega^2) + \omega_p^2 \right] E_{x1} - i\omega_p^2 \frac{\omega_c}{\omega} E_{y1} = 0$$

det = 0 より分散関係は

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{v_p^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} \quad \begin{array}{l} +: \text{ L wave } E_{y1} = -iE_{x1} \\ -: \text{ R wave } E_{y1} = +iE_{x1} \end{array}$$

L(R) wave の場合

$$E_{x1}(t) = \text{Re}(\bar{E}_{x1} e^{-i\omega t}) = \bar{E}_{x1} \cos(\omega t)$$

$$E_{y1}(t) = \text{Re}(\mp i \bar{E}_{x1} e^{-i\omega t}) = \mp \bar{E}_{x1} \sin(\omega t)$$

左(右)回りの円偏波

L wave

cutoff at $\omega = \omega_L$ ($\omega > \omega_L$ で伝搬)

R wave

cutoff at $\omega = \omega_R$ ($\omega > \omega_R$ で伝搬)

resonance at $\omega = \omega_c$ ($\omega < \omega_c$ で伝搬)

$v_p(R) > v_p(L)$ なので直線偏波を入射すると偏波角が回転する (Faraday rotation)

低周波波動

イオンの運動が無視できない

warm plasma 近似 (温度・圧力は有限だが波動-粒子相互作用は重要でない)

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}, \quad \mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_z \hat{z} = k \sin \theta \hat{x} + k \cos \theta \hat{z}$$

線形化された運動方程式

$$m n_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = q n_0 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) - \gamma T \nabla n_1$$

$$-i \omega m u_{x1} = q (E_{x1} + u_{y1} B_0) - i k_x \gamma T \frac{n_1}{n_0}$$

$$-i \omega m u_{y1} = q (E_{y1} - u_{x1} B_0)$$

$$-i \omega m u_{z1} = q E_{z1} - i k_z \gamma T \frac{n_1}{n_0}$$

連続の式より得られる $\frac{n_1}{n_0} = \frac{k}{\omega} (u_{x1} \sin \theta + u_{z1} \cos \theta)$ を代入して

$$-i \omega m u_{x1} = q (E_{x1} + u_{y1} B_0) - i \frac{k^2}{\omega} \gamma T (u_{x1} \sin^2 \theta + u_{z1} \sin \theta \cos \theta)$$

$$-i \omega m u_{y1} = q (E_{y1} - u_{x1} B_0)$$

$$-i \omega m u_{z1} = q E_{z1} - i \frac{k^2}{\omega} \gamma T (u_{x1} \sin \theta \cos \theta + u_{z1} \cos^2 \theta)$$

$$\mathbf{j}_1 = \sum n_0 q \mathbf{u}_1 \equiv \underline{\sigma} \cdot \mathbf{E}_1 \quad \underline{\sigma}: \text{電気伝導度テンソル}$$

と定義し、これを波動方程式に代入して

$$\mathbf{k}^2 \mathbf{E}_1 - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\mathbf{I} + i \frac{\underline{\sigma}}{\varepsilon_0 \omega} \right) \cdot \mathbf{E}_1 = \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_1 \quad \underline{\varepsilon} \equiv \varepsilon_0 \left(\mathbf{I} + i \frac{\underline{\sigma}}{\varepsilon_0 \omega} \right): \text{誘電率テンソル}$$

分散関係は以下の式 ($\det = 0$) により表される。

$$\left| \omega^2 \mu_0 \underline{\varepsilon} - \mathbf{k}^2 \mathbf{I} + \mathbf{k}\mathbf{k} \right| = 0$$

Cold Plasma Dispersion Relation ($T_e = T_i = 0$)

index of refraction (屈折率) $\mathbf{n} \equiv \frac{c\mathbf{k}}{\omega} = \frac{c}{v_p}$ を定義し、Stix notation を用いる。

$$R \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} - \frac{\Omega_p^2}{\omega(\omega + \Omega_c)} \quad \omega_p = \omega_{pe}, \omega_c = \omega_{ce}$$

$$L \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} - \frac{\Omega_p^2}{\omega(\omega - \Omega_c)} \quad \Omega_p = \omega_{pi}, \Omega_c = \omega_{ci}$$

$$S \equiv \frac{R+L}{2}$$

$$D \equiv \frac{R-L}{2}$$

$$P \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}$$

$n_x = n \sin\theta, n_z = n \cos\theta$ とすると

$$\begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin\theta \cos\theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin\theta \cos\theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \\ E_{z1} \end{pmatrix} = 0$$

$\det = 0$ より次の分散関係を得る。

$$\tan^2 \theta = \frac{-P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(Sn^2 - RL)(n^2 - P)}$$

// propagation ($\theta = 0$): $n^2 = R$ (R wave) $n^2 = L$ (L wave)

\perp propagation ($\theta = \pi/2$): $n^2 = P$ (O mode) $n^2 = RL/S$ (X mode)

cutoff ($n^2 \rightarrow 0$): $PRL=0 \Rightarrow \omega = \omega_p, \omega_R, \omega_L$ (θ によらない)

resonance ($n^2 \rightarrow \infty$): $\tan^2 \theta = -P/S$ (θ による)

$$\theta = 0: P = 0 \Rightarrow \omega = \omega_p, S \rightarrow \infty \Rightarrow \omega = \omega_c (R \rightarrow \infty), \omega = \Omega_c (L \rightarrow \infty)$$

$$\theta = \pi/2: S = 0 \Rightarrow \omega = \omega_h \text{ (upper hybrid)}, \omega = \omega_{lh} \text{ (lower hybrid)}$$

Shear Alfvén wave

// propagation $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$, $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$, \mathbf{k} ($\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{k}$ の場合は ion acoustic wave)

$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ とすると $E_{z1} = 0$, $u_{z1} = 0$, $j_{z1} = 0$ であり、低周波 ($\omega \leq \Omega_c \ll \omega_c$) の場合を考えると

$$u_{xe1} = \frac{e}{m} \frac{i\omega E_{x1} + \omega_c E_{y1}}{\omega_c^2 - \omega^2} \approx \frac{e}{m} \frac{E_{y1}}{\omega_c} = \frac{e}{M} \frac{E_{y1}}{\Omega_c}$$

$$u_{ye1} = \frac{e}{m} \frac{i\omega E_{y1} - \omega_c E_{x1}}{\omega_c^2 - \omega^2} \approx -\frac{e}{m} \frac{E_{x1}}{\omega_c} = -\frac{e}{M} \frac{E_{x1}}{\Omega_c}$$

$$u_{xi1} = -\frac{e}{M} \frac{i\omega E_{x1} - \Omega_c E_{y1}}{\Omega_c^2 - \omega^2}$$

$$u_{yi1} = -\frac{e}{M} \frac{i\omega E_{y1} + \Omega_c E_{x1}}{\Omega_c^2 - \omega^2}$$

これより電流を求めると

$$\mathbf{j}_1 = \frac{n_0 e}{M} \begin{pmatrix} \frac{-i\omega}{\Omega_c^2 - \omega^2} & \frac{\Omega_c}{\Omega_c^2 - \omega^2} - \frac{1}{\Omega_c} \\ -\frac{\Omega_c}{\Omega_c^2 - \omega^2} + \frac{1}{\Omega_c} & \frac{-i\omega}{\Omega_c^2 - \omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{E}_1$$

分散関係は

$$\left| \omega^2 \mu_0 \underline{\underline{\varepsilon}} - k^2 \mathbf{I} + \mathbf{k}\mathbf{k} \right| = 0, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} \equiv \varepsilon_0 \left(\mathbf{I} + i \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\varepsilon_0 \omega} \right) \quad \text{で表される。 } \mathbf{n} = c\mathbf{k}/\omega \text{ を用いて書き直すと}$$

$$\left| \mathbf{I} \left(1 - n^2 \right) + \mathbf{n}\mathbf{n} + i \frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\varepsilon_0 \omega} \right| = \begin{vmatrix} 1 - n^2 + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2 - \omega^2} & i \frac{\Omega_p^2 \omega}{\Omega_c (\Omega_c^2 - \omega^2)} \\ -i \frac{\Omega_p^2 \omega}{\Omega_c (\Omega_c^2 - \omega^2)} & 1 - n^2 + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2 - \omega^2} \end{vmatrix} = 0$$

これより次の分散関係を得る。

$$n^2 = \frac{\Omega_c + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c} \pm \omega}{\Omega_c \pm \omega} \quad \begin{cases} + \text{ R wave} \\ - \text{ L wave} \end{cases}$$

zz 成分はこれと直交しており、静電波を表す。

Shear Alfvén R wave

低周波数領域では cutoff / resonance 無し

高周波数領域では R wave となり、 $\omega = \omega_c$ で共鳴を起こす。

$$\omega \rightarrow 0 \text{ では } n = \sqrt{1 + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2}}$$

Alfvén speed $v_A = c \frac{\Omega_c}{\Omega_p} = c \frac{eB}{M} \sqrt{\frac{\epsilon_0 M}{ne^2}} = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 n M}}$ を導入すると ($v_A \ll c$)

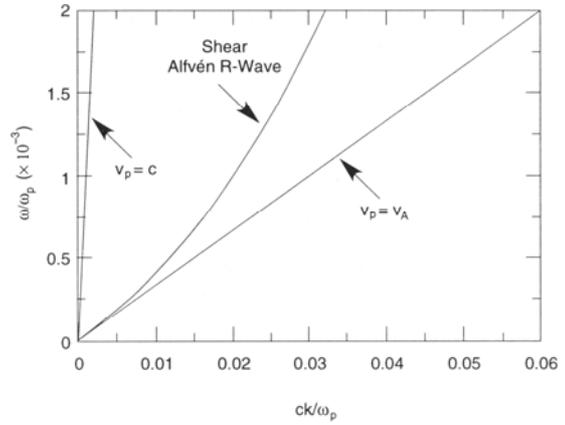
$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{v_A^2}}} \approx v_A$$

Shear Alfvén L wave

$\omega = \Omega_c$ 共振

$\omega = \omega_L = \Omega_c + \Omega_p^2/\Omega_c$ cutoff

$\omega \rightarrow 0$ では $n = \sqrt{1 + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2}}$ (R waveと同じ)



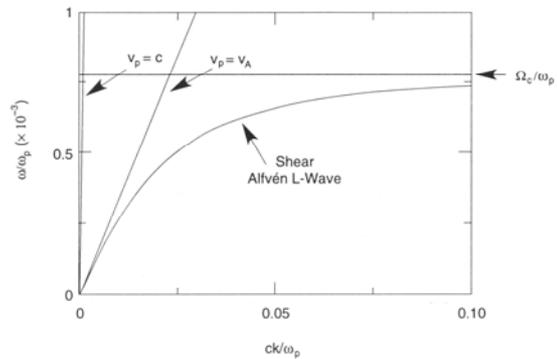
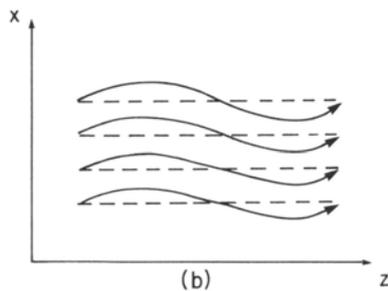
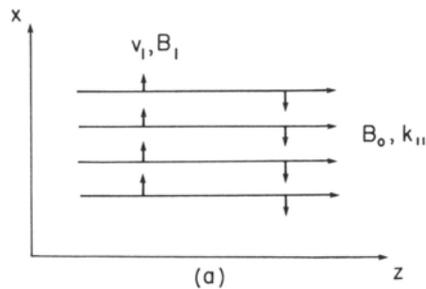
Shear Alfvén R wave

R wave と L wave を重ね合わせ、直線偏波が可能 ($\omega \ll \Omega_c$ では R 波、L 波の速度は等しいので、Faraday rotation は起こらない)。

$\omega \ll \Omega_c$ では電子もイオンも $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0$ ドリフトが支配的となり、磁力線もプラズマと一緒に動く。

Shear Alfvén wave では $\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$ なので非圧縮性である。

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0)$$



Shear Alfvén L wave

Magnetosonic wave

⊥ propagation $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_0$ X-mode ($\mathbf{E}_1 // \mathbf{B}_0$ の O-mode は $\omega < \omega_p$ では存在しない。)

$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$, $\mathbf{k} = k \hat{x}$ とし, $\Omega_c \ll \omega \ll \omega_c$ の周波数領域を考える (この場合 electron polarization drift は無視できない)。分散関係は

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2 - \omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} & i \frac{\Omega_p^2 \omega}{\Omega_c (\Omega_c^2 - \omega^2)} \\ -i \frac{\Omega_p^2 \omega}{\Omega_c (\Omega_c^2 - \omega^2)} & 1 - n^2 + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2 - \omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \end{vmatrix} = 0 \text{ を解いて}$$

$$n^2 \left(\frac{\Omega_c^2 - \omega^2 + \Omega_p^2}{\Omega_c^2 - \omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \right) = \left(\frac{\Omega_c^2 - \omega^2 + \Omega_p^2}{\Omega_c^2 - \omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \right)^2 - \left[\frac{\Omega_p^2 \omega}{\Omega_c (\Omega_c^2 - \omega^2)} \right]^2$$

この波は n^2 の係数が 0 となるところで共振を起こす ($n \rightarrow \infty$)。その条件は

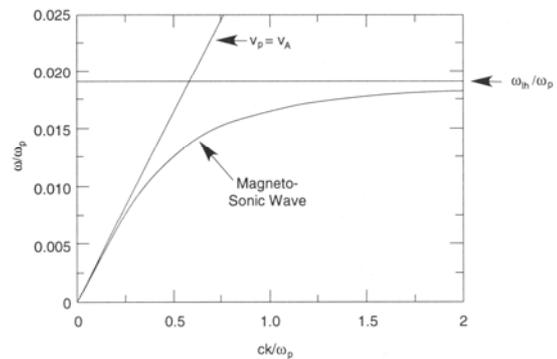
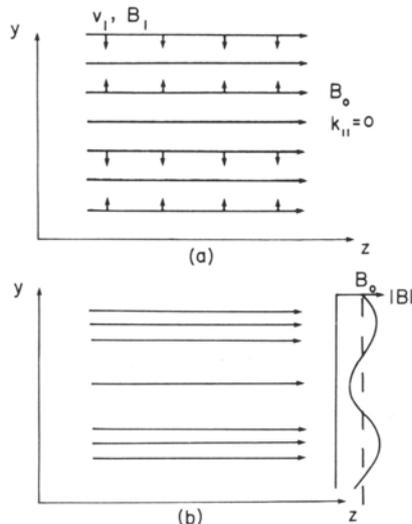
$$\omega^2 = \omega_{lh}^2 = \frac{\omega_c \Omega_c (\Omega_c^2 + \Omega_p^2)}{\Omega_p^2 + \omega_c \Omega_c} \quad \omega_{lh}: \text{lower hybrid frequency}$$

$$\Omega_p^2 \gg \Omega_c^2 \text{ の場合は } \frac{1}{\omega_{lh}^2} = \frac{1}{\Omega_p^2} + \frac{1}{\omega_c \Omega_c}$$

$$\omega \rightarrow 0 \text{ の極限では } n^2 = 1 + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_c^2} \approx 1 + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} \quad (\text{Alfvén wave})$$

この波は magnetosonic wave (compressional Alfvén wave) と呼ばれる ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 \neq 0$ なので圧縮性)。

プラズマ・磁力線が圧縮される。



Compressional Alfvén wave