

### Unit 3. プラズマ中の衝突過程

#### 衝突

$e \rightarrow \text{neutral}$

原子により遮られる割合  $n_n \sigma dx$

$$\Gamma + d\Gamma = \Gamma (1 - n_n \sigma dx)$$

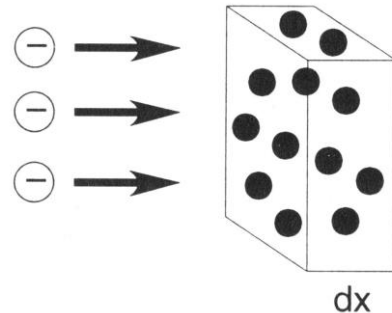
$$d\Gamma/dx = -n_n \sigma \Gamma \rightarrow \Gamma = \Gamma_0 \exp(-n_n \sigma x) = \Gamma_0 \exp(-x / \lambda_{\text{mfp}})$$

$$\lambda_{\text{mfp}} = 1/(n_n \sigma) \quad \text{mean free path}$$

$$\tau = \lambda_{\text{mfp}} / v \quad \text{collision time}$$

$$v = \langle 1/\tau \rangle = n_n \langle \sigma v \rangle \quad \text{collision frequency}$$

(電子の速度分布について平均)



#### 電離・再結合

水素原子を考える。

$$\text{Bohr radius } a_0 = \hbar^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2}$$

イオン化するのに必要なエネルギー (Ry)

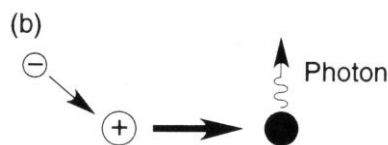
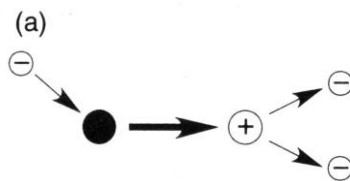
$$E_i = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} - \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} = 13.6 \text{ eV}$$

↑

$$\text{静電力 } \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} = \frac{mv^2}{a_0} \quad \text{遠心力}$$

Electron impact ionization

Radiative recombination



逆過程 3-body recombination

Radiative ionization

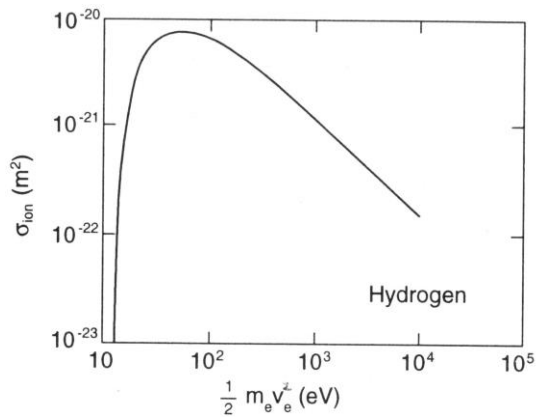
$$\text{electron source rate } S_e = n_e n_n \langle \sigma_{\text{ion}} v_e \rangle$$

$$\text{neutral source rate } S_n = n_e n_i \langle \sigma_{\text{recomb}} v_e \rangle$$

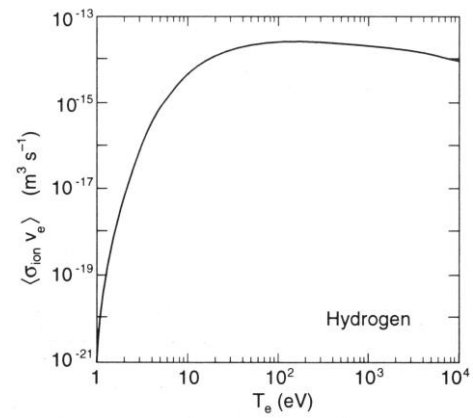
コロナ平衡 (coronal equilibrium)

$$S_e (\text{el. Impact ioniz.}) = S_n (\text{rad. Recomb.})$$

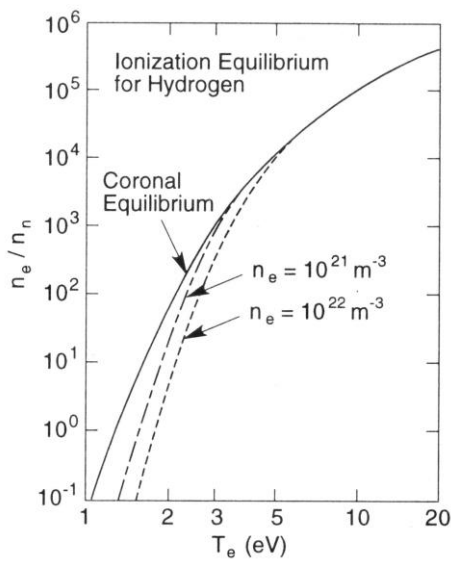
$$T_e = 13.6 \text{ eV} \rightarrow n_e/n_n \cong 10^5, \quad T_e = 1.5 \text{ eV} \rightarrow n_e/n_n \cong 1$$



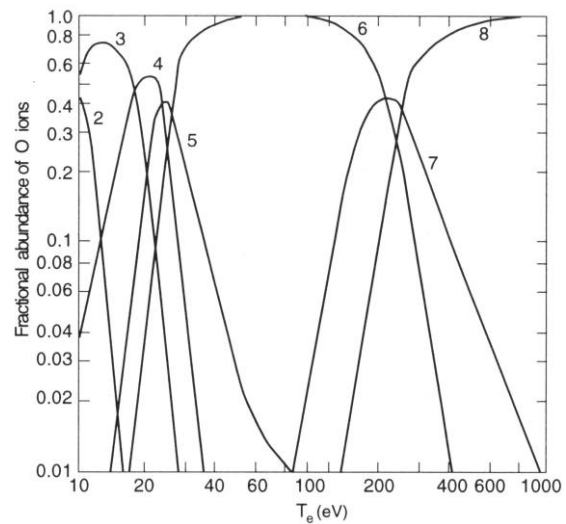
水素原子のイオン化断面積



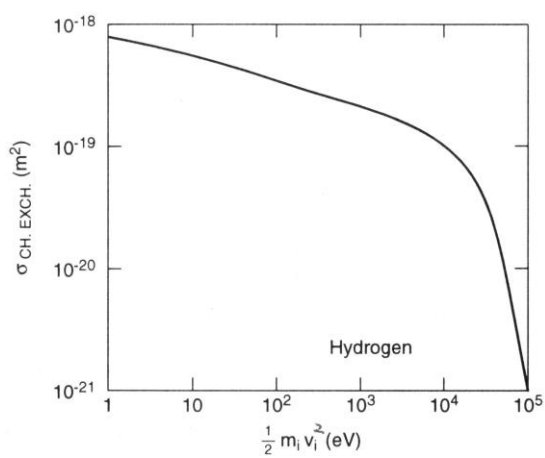
水素のイオン化速度（速度分布平均）



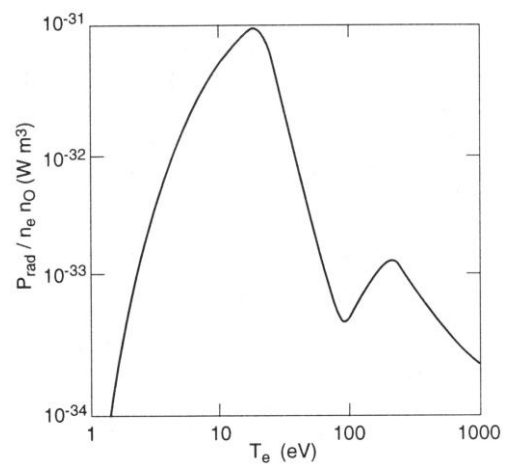
水素のイオン化平衡



コロナ平衡下の酸素イオンの相対存在比率



水素の荷電交換断面積



コロナ平衡下の水素プラズマからの放射  
パワー密度

### 中性粒子のプラズマへの侵入長

プラズマ粒子 → 壁で再結合し、中性粒子（原子）になる。

volumetric ionization rate  $n_e n_n \langle \sigma_{ion} v_e \rangle$

→ effective collision frequency  $n_e \langle \sigma_{ion} v_e \rangle$

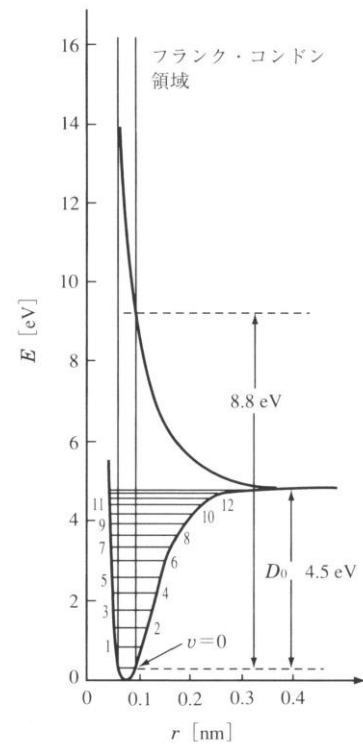
中性粒子イオン化のための mean free path

$$\lambda_n = v_n / (n_e \langle \sigma_{ion} v_e \rangle)$$

典型的な例  $T_e = 10 - 20 \text{ eV} \rightarrow \lambda_n = 2 \times 10^{17} / n_e \text{ (m}^{-3}\text{)}$

飽和した壁から出てくる中性粒子（分子）

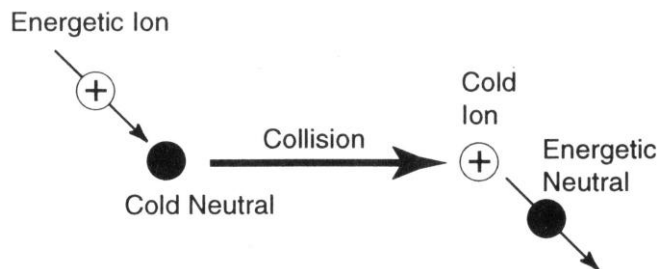
→ 解離して 3 eV 程度の原子対を生成（Franck-Condon）



### 荷電交換 (charge exchange)

$\sigma_{CX} \sim 10^2 \sigma_{ion}$  for  $T_e \sim T_i$   $\langle \sigma_{CX} v_i \rangle / \langle \sigma_{ion} v_e \rangle = 2 \sim 3$

エネルギーの高い中性粒子が生成される → より深くまで浸透



## クーロン衝突 (散乱)

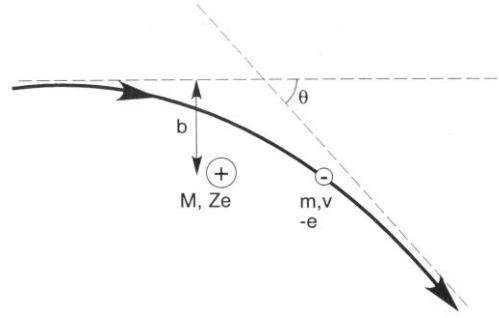
$e \rightarrow i$

$M \gg m$  のためイオンは動かない

エネルギーおよび角運動量の保存より

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2 b} \equiv \frac{b_0}{b}$$

$$90^\circ \text{散乱の場合 } b = b_0 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \quad \sigma_i = \pi b_0^2$$



クーロン力は長距離力なので、多くの小角散乱の累積効果が大きい。

$$\langle \Delta v_x \rangle = \langle \Delta v_y \rangle = 0$$

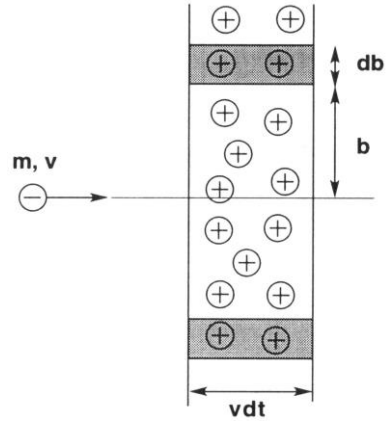
$$\langle (\Delta v_x)^2 \rangle = \langle (\Delta v_y)^2 \rangle = \langle (\Delta v_\perp)^2 \rangle / 2 \neq 0$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b_0}{b} \rightarrow \sin \theta = \frac{2b/b_0}{1 + (b/b_0)^2}$$

$$1 \text{ 回の散乱で } (\Delta v_\perp)^2 = v^2 \sin^2 \theta = \frac{4v^2 (b/b_0)^2}{[1 + (b/b_0)^2]^2}$$

$dt$  の時間、 $b \sim b+db$  の間の衝突を考える。

$$\frac{d\langle (\Delta v_\perp)^2 \rangle}{dt} = 2\pi n_i v \int (\Delta v_\perp)^2 b db = 8\pi n_i v^3 \int \frac{(b/b_0)^2 b db}{[1 + (b/b_0)^2]^2}$$



$b$  の上限を  $b_{\max}$  とする ( $b_{\max} \sim \lambda_D$ )。  $y = 1 + (b/b_0)^2$  とおき積分すると

$$\frac{d\langle (\Delta v_\perp)^2 \rangle}{dt} = 4\pi n_i v^3 b_0^2 \left\{ \ln \left[ 1 + \left( \frac{b_{\max}}{b_0} \right)^2 \right] + \frac{1}{1 + \left( \frac{b_{\max}}{b_0} \right)^2} - 1 \right\} \cong 8\pi n_i v^3 b_0^2 \ln \Lambda = \frac{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{2\pi\epsilon_0^2 m^2 v}$$

Maxwell 分布で平均すると  $\langle mv^2/2 \rangle = (3/2)T$  を使い、  $b_0 \sim Ze^2/(12\pi\epsilon_0 T) \sim Z/(12\pi n\lambda_D^2)$

$$\Lambda \equiv b_{\max}/b_0 \sim \lambda_D/b_0 \sim (12\pi/Z) n\lambda_D^3 \gg 1$$

(プラズマの定義より  $n\lambda_D^3 \gg 1$ )

$\ln \Lambda$  : Coulomb logarithm 多数の小角散乱による寄与。

$e$ - $i$  衝突において電子のエネルギーは近似的に保存される。

$$(v + \Delta v_\parallel)^2 + (\Delta v_\perp)^2 = v^2 \rightarrow 2v \Delta v_\parallel + (\Delta v_\perp)^2 = 0 \rightarrow \Delta v_\parallel / v \sim O[(\Delta v_\perp / v)^2]$$

$$\frac{d\langle \Delta v_\parallel \rangle}{dt} = -4\pi n_i v^2 b_0^2 \ln \Lambda = -\frac{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 m^2 v^2}$$

電子の運動量損失に関する衝突周波数

$$\frac{d\langle \Delta v_{\parallel} \rangle}{dt} = -\nu_{ei} v \rightarrow \nu_{ei} = \frac{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m^2 v^3}, \quad \nu_{ei} = n_i \sigma_{ei} v \rightarrow \sigma_{ei} = \frac{Z^2 e^4 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m^2 v^4}$$

一般に散乱する粒子が静止しているという近似が成り立たない場合（例えば e-e および i-i 衝突の場合）は、質量中心系で考え換算質量、相対速度を用いる。電荷 q、質量 m、速度 v のテスト電荷が、電荷 q\*、質量 m\*、熱速度  $v_t^* = (T^*/m^*)^{1/2}$  の粒子群と衝突するとき、 $v > v_t^*$  と仮定すると、換算質量  $m_r = mm^*/(m+m^*)$  を使い

$$\nu = \frac{n^* q^2 q^{*2} \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m m_r v^3}$$

散乱される粒子が速度分布をもっている場合は、速度分布について平均をとる。Shifted Maxwell 分布の場合

$$\langle \nu_{ei} \rangle = \frac{2^{1/2} n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{12\pi^{3/2} \epsilon_0^2 m^{1/2} T_e^{3/2}}$$

$$\langle \nu_{ee} \rangle = \frac{n_e e^4 \ln \Lambda}{12\pi^{3/2} \epsilon_0^2 m^{1/2} T_e^{3/2}}$$

$$\langle \nu_{ii} \rangle = \frac{n_i Z^4 e^4 \ln \Lambda}{12\pi^{3/2} \epsilon_0^2 M^{1/2} T_i^{3/2}}$$

これより、 $T_e \sim T_i$  であれば  $\langle \nu_{ei} \rangle \sim \langle \nu_{ee} \rangle \sim (M/m)^{1/2} \langle \nu_{ii} \rangle$

### エネルギー交換

まず  $T_e \gg T_i$  の場合を考える。180°散乱の場合がエネルギーおよび運動量の交換が一番大きい。

$$mv_0 = MV - mv_1$$

$$mv_0^2/2 = MV^2/2 + mv_1^2/2$$

$v_1 \cong v_0$  より、 $MV^2/2 = mv_0^2/2 (4m/M)$

$$M|\Delta V|^2/2 = (m^2/2M) |\Delta v|^2 \cong (m^2/2M) (\Delta v_{\perp})^2$$

多くの電子が多くのイオンと衝突する場合には、

$$\frac{d\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle}{dt} = \frac{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2 m^2 v}$$

であるから、電子エネルギーの損失は

$$\frac{dW_e}{dt} = -\frac{m^2}{2M} \int \frac{d\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle}{dt} f_e d^3v = -\frac{dW_i}{dt}$$

Maxwell 分布の場合には

$$dT_i/dt = T_e/\tau_{eq}, \quad \frac{1}{\tau_{eq}} = \frac{n_i Z^2 e^4 m^{1/2} \ln \Lambda}{3\pi (2\pi)^{1/2} \epsilon_0^2 M T_e^{3/2}} \sim \frac{2m}{M} \langle \nu_{ei} \rangle \quad (\text{遅い})$$

$T_i$  が有限のときは、

$$dT_i/dt = (T_e - T_i)/\tau_{eq}$$

$$dT_e/dt = (n_i/n_e)(T_i - T_e)/\tau_{eq}$$

### プラズマからの輻射

クーロン衝突により電子は加速度を受けるため電磁波を放射する（制動輻射 *Bremsstrahlung*）。

このほか電磁波を放射する過程として

Recombination

Line radiation

がある。

磁場中で運動する荷電粒子は **Lorentz** 力による加速度を受ける。このためサイクロトロン周波数の整数倍で

Cyclotron radiation

が放射される。これに相対論的効果が加わると

Synchrotron radiation

となる。

## プラズマ中の拡散

random walk ( $\Delta t$  で  $\Delta x$  のステップをとるとする)

$n$  ステップ後、右に  $r$  ステップ動く確率は  $P_n(r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{1}{2^n}$

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = 4(\Delta x)^2 \sum_{r=0}^n \left( r - \frac{n}{2} \right)^2 P_n(r) = n(\Delta x)^2 = t (\Delta x)^2 / \Delta t$$

$x = x_0$  を横切る流束 (flux) を考える。

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{x_0-\Delta x}^{x_0} \frac{n(x)}{2} dx \cong \frac{1}{2\Delta t} \int_{x_0-\Delta x}^{x_0} \left( n(x_0) + (x - x_0) \frac{dn}{dx} \Big|_{x_0} \right) dx \\ \text{右方向の flux} \quad &= \frac{1}{2\Delta t} \left[ n(x_0) \Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{dn}{dx} \Big|_{x_0} \right] \end{aligned}$$

$$\text{左方向の flux} \quad \Gamma_- \cong -\frac{1}{2\Delta t} \left[ n(x_0) \Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{dn}{dx} \Big|_{x_0} \right]$$

$$\text{正味の flux} \quad \Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_- \cong -\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{dn}{dx} = -D \frac{dn}{dx}$$

$$\text{連続の式を使うと} \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial n}{\partial x} \right) \quad \text{拡散方程式} \quad D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad \text{拡散係数}$$

$t = 0$  で  $\delta(x)$  という初期条件のもとに解くと拡散方程式の解は

$$n(x, t) = \frac{N}{(4\pi Dt)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \int x^2 n(x, t) dx = 2Dt = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t$$

$$\text{磁場の無い場合} \quad D \sim \nu \lambda_{\text{mfp}}^2 \sim \frac{v_{\perp}^2}{\nu} \sim \frac{T}{m\nu}$$

強い磁場 ( $\omega_c \gg \nu$ ) のある場合

$$\text{磁場に沿った方向} \quad D_{\parallel} \sim \nu \lambda_{\text{mfp}}^2 \sim \frac{T_{\parallel}}{m\nu}$$

$$\text{磁場に垂直な方向} \quad D_{\perp} \sim v_L^2 \sim \frac{\nu T_{\perp}}{\omega_c^2 m}$$

## 弱電離プラズマ中の拡散

$$v_{en} = n_n \langle \sigma_n v_e \rangle, \quad v_{in} = n_n \langle \sigma_n v_i \rangle$$

$$T_e \cong T_i \text{ ならば } \frac{v_{en}}{v_{in}} \sim \frac{v_{te}}{v_{ti}} \sim \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2} \rightarrow \frac{D_{\parallel e}}{D_{\parallel i}} \sim \frac{v_{te}^2}{v_{ti}^2} \frac{v_{in}}{v_{en}} \sim \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2}, \quad \frac{D_{\perp e}}{D_{\perp i}} \sim \frac{r_{Le}^2}{r_{Li}^2} \frac{v_{en}}{v_{in}} \sim \left( \frac{m}{M} \right)^{1/2}$$

$\mathbf{B} = 0$  の場合、運動方程式は  $mn \, d\mathbf{u}/dt = qn\mathbf{E} - \nabla p - mn\nu\mathbf{u}$

定常状態 ( $\partial/\partial t = 0$ )、衝突が頻繁な場合 ( $\nu \gg u/L$ )、等温的な場合 ( $\nabla p = T\nabla n$ )、

$$\mathbf{u} = \frac{q}{m\nu} \mathbf{E} - \frac{T}{m\nu} \frac{\nabla n}{n}$$

mobility    diffusion coeff.

$$\text{quasineutrality より } \mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{E} = -\frac{T_e M \nu_{in} - T_i m \nu_{en}}{M \nu_{in} + m \nu_{en}} \frac{\nabla n}{ne} \cong -\frac{T_e}{ne} \nabla n \quad \text{ambipolar E field}$$

電子とイオンの損失が同じになるように ( $n\mathbf{u}_e = n\mathbf{u}_i = -D_a \nabla n$ ) 電場ができる。

$$\text{このときの拡散係数は、 } D_a = \frac{T_e + T_i}{M \nu_{in}} = D_i \left( 1 + \frac{T_e}{T_i} \right) \quad \text{ambipolar diffusion coefficient}$$

$\mathbf{B} \neq 0$  の場合、磁場に $\perp$ 成分を考える ( $\parallel$ 成分は磁場の無いときと同じ)。

$$mn \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}) - T\nabla n - mn\nu\mathbf{u}$$

$\mathbf{B} = B\mathbf{z}$ ,  $\nabla n = dn/dx \, \mathbf{x}$  とすると、 $\tau = 1/\nu$ として

$$u_x = \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \left( \frac{qE_x}{m\nu} - \frac{T}{m\nu} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)$$

$$u_y = \frac{\omega_c^2 \tau^2}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \left( \frac{E_x}{B} - \frac{T}{qB} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)$$

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift    diamag. drift

磁場が強いとき ( $\omega_c \gg \nu$ )  $\perp$ 方向の拡散が  $1/(\omega_c \tau)^2$  に減少する。

$$D_\parallel \sim \frac{T}{m\nu} \propto \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad D_\perp \sim \frac{\nu T_\perp}{\omega_c^2 m} \propto \sqrt{m}$$

$$u_{i\perp} > u_{e\perp} \rightarrow E < 0 \text{ が形成される。} \quad \mathbf{E} \cong \frac{T_i}{ne} \nabla_\perp n$$

$$n\mathbf{u}_{e\perp} = n\mathbf{u}_{i\perp} = -D_a \nabla_\perp n$$

$$D_a \cong \frac{\nu_{en}(T_e + T_i)}{m\omega_{ce}^2} \cong \nu_{en} \langle r_{Le}^2 \rangle \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right), \quad \langle r_{Le}^2 \rangle \cong \frac{T_e}{m\omega_{ce}^2} \cong \frac{mT_e}{e^2 B^2}$$

### 完全電離プラズマ中の拡散

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{\nabla p_e}{ne} - \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne} = \eta \mathbf{j}$$

$u \ll v_{ti}$  の平衡状態を考える。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$$

$\mathbf{B} = B\mathbf{z}$ ,  $\nabla p = |\nabla p| \mathbf{x}$  とすると

$$j_x = 0, \quad j_y = \frac{1}{B} \frac{dp}{dx} \quad \rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{ambipolarity}) \text{ は自動的に満足。}$$

$$u_y = -\frac{E_x}{B} + \frac{1}{neB} \frac{dp_i}{dx}$$

$$u_x = -\frac{\eta}{B^2} \frac{dp}{dx} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_\perp = -\frac{\eta}{B^2} \nabla_\perp p$$

連続方程式より、等温条件 ( $p/\rho = T/M = \text{const.}$ ) を使って

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla_\perp \cdot \left( \frac{\rho \eta}{B^2} \nabla_\perp p \right) = \nabla_\perp \cdot \left( \frac{\eta p}{B^2} \nabla_\perp \rho \right)$$

$$D_\perp = \frac{\eta p}{B^2} \sim \frac{\nu_{ei} m (T_e + T_i)}{e^2 B^2} \sim \nu_{ei} \langle r_{Le}^2 \rangle \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right)$$

### 同種粒子間 (e-e, i-i) の衝突

イオンの場合を考える (電子の場合も同様)。

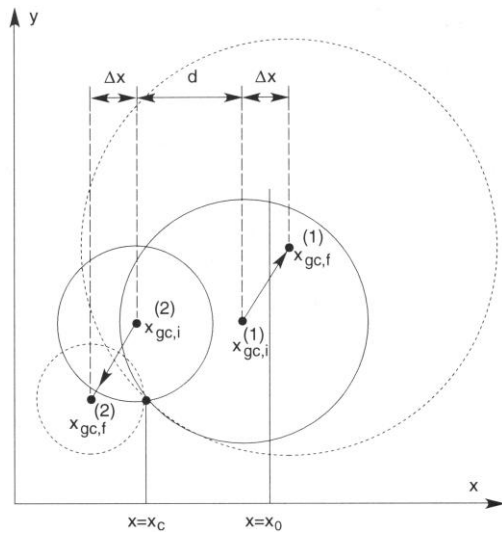
$$x_{gc} = x + \frac{v_y}{\omega_c} = x + \frac{Mv_y}{eB}$$

衝突前後の運動量保存より  $\left[ \sum Mv_y \right]_{\text{initial}} = \left[ \sum Mv_y \right]_{\text{final}}$  なので

$$\left[ x_{gc}^{(1)} + x_{gc}^{(2)} \right]_{\text{initial}} = \left[ x_{gc}^{(1)} + x_{gc}^{(2)} \right]_{\text{final}}$$

であるから、  
衝突前後で質量中心の位置は変わらない。

同種粒子間の衝突では拡散は起こらない。



同種粒子間の衝突で質量中心の位置は変わらない

### 異種粒子間 (e-i) の衝突

同様に運動量保存より

$$\left[ x_{gc}^{(1)} - x_{gc}^{(2)} \right]_{\text{initial}} = \left[ x_{gc}^{(1)} - x_{gc}^{(2)} \right]_{\text{final}}$$

$$x_{gc, \text{final}}^{(2)} - x_{gc, \text{initial}}^{(2)} = x_{gc, \text{final}}^{(1)} - x_{gc, \text{initial}}^{(1)}$$

粒子(1)および(2)は同方向に同じ大きさのステップをとる。

異種粒子間の衝突による拡散は ambipolar である。