Unit 2. 流体としてのプラズマ

Klimontovich 方程式系（Γ空間）

分布関数

$$\hat{f}_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = \sum_{j=1}^{N_\alpha} \delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_j(t)]\,\delta[\mathbf{v}-\mathbf{v}_j(t)] \qquad (\alpha = e, i)$$

$$\partial\hat{f}_\alpha/\partial t + \mathbf{v}\cdot\partial\hat{f}_\alpha/\partial\mathbf{r} + \hat{\mathbf{K}}_\alpha\cdot\partial\hat{f}_\alpha/\partial\mathbf{v} = 0 \qquad [\hat{\mathbf{K}}_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = q_\alpha/m_\alpha(\hat{\mathbf{E}} + \mathbf{v}\times\hat{\mathbf{B}})]$$

$$\nabla\times\hat{\mathbf{E}} = -\partial\hat{\mathbf{B}}/\partial t \qquad \nabla\cdot\hat{\mathbf{B}} = 0$$

$$\nabla\times\hat{\mathbf{B}} = 1/c^2\,\partial\hat{\mathbf{E}}/\partial t + \mu_0\hat{\mathbf{J}} \qquad \nabla\cdot\hat{\mathbf{E}} = \hat{\sigma}_e/\varepsilon_0$$

$$\hat{\mathbf{J}} = \sum_\alpha q_\alpha\int \mathbf{v}\,\hat{f}_\alpha\,d^3\mathbf{v} \qquad \hat{\sigma}_e = \sum_\alpha q_\alpha\int \hat{f}_\alpha\,d^3\mathbf{v}$$

6N 個（$N = \sum_\alpha N_\alpha$）の初期値が必要　$\{\mathbf{r}_j, \mathbf{v}_j\}$　$j = 1, N$

Boltzmann-Vlasov 方程式系（μ空間）

初期値についてのアンサンブル平均 → $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$の滑らかな関数

$$f_\alpha \equiv \langle\hat{f}_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t\,|\,\{\mathbf{r}_j,\mathbf{v}_j\})\rangle, \quad \mathbf{E}\equiv\langle\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t\,|\,\{\mathbf{r}_j,\mathbf{v}_j\})\rangle, \quad \text{etc.}$$

$$\partial f_\alpha/\partial t + \mathbf{v}\cdot\partial f_\alpha/\partial\mathbf{r} + \langle\hat{\mathbf{K}}_\alpha\cdot\partial\hat{f}_\alpha/\partial\mathbf{v}\rangle = 0$$

$$\langle\hat{\mathbf{K}}_\alpha\cdot\partial\hat{f}_\alpha/\partial\mathbf{v}\rangle = \mathbf{K}_\alpha\cdot\partial f_\alpha/\partial\mathbf{v} + \langle\hat{\mathbf{K}}_\alpha\cdot\partial\hat{f}_\alpha/\partial\mathbf{v}\rangle_{corr.}$$

二体相関（衝突の効果）を表す

$$\partial f_\alpha/\partial t + \mathbf{v}\cdot\partial f_\alpha/\partial\mathbf{r} + \mathbf{K}_\alpha\cdot\partial f_\alpha/\partial\mathbf{v} = -\langle\hat{\mathbf{K}}_\alpha\cdot\partial\hat{f}_\alpha/\partial\mathbf{v}\rangle_{corr.} \qquad \text{Boltzmann eq.}$$

非線形項　　　　右辺 = 0 の場合 Vlasov eq.と呼ぶ

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = 1/c^2\,\partial\mathbf{E}/\partial t + \mu_0\mathbf{J} \qquad \nabla\cdot\mathbf{E} = \sigma_e/\varepsilon_0$$

$$\mathbf{J} = \sum_\alpha q_\alpha\int \mathbf{v}\,f_\alpha\,d^3\mathbf{v} \qquad \sigma_e = \sum_\alpha q_\alpha\int f_\alpha\,d^3\mathbf{v}$$

流体方程式

Vlasov eq.の速度空間における（1, m$\mathbf{v}$, mv^2/2）モーメント → 質量、運動量、エネルギー保存則

これらを用いてプラズマの巨視的挙動を記述する。

速度分布について積分しているので、運動論的効果（波動-粒子相互作用）は無視される（運動論的効果については後述）。

連続方程式（粒子数の保存、質量をかければ質量の保存）

粒子密度　$n_\alpha(r,t) = \int f_\alpha (\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v}$　　　（以後αは省略）

$\partial n/\partial t + \nabla\cdot\Gamma = S$　　continuity equation

$\Gamma = \int \mathbf{v}\, f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v} = n(\mathbf{r},t)\, \mathbf{u}(\mathbf{r},t)$　　particle flux

$\mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle = \int \mathbf{v}\, f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v} / \int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v}$　平均流速

S:　source (ionization) / sink (recombination)

完全電離プラズマでは無視できることが多い　（その場合、右辺= 0）

運動量バランスの式（流体運動方程式）　m**v** モーメント

$\partial(nm\langle\mathbf{v}\rangle)/\partial t + \nabla\cdot(nm\langle\mathbf{vv}\rangle) = nq(\mathbf{E} + \langle\mathbf{v}\rangle \times \mathbf{B})$

momentum density　$\int m\mathbf{v}\, f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v} = nm\mathbf{u}$

momentum transfer tensor　$\int m\mathbf{vv}\, f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v} = nm\langle\mathbf{vv}\rangle$

pressure tensor　$\mathbf{P} = \int m(\mathbf{v} - \mathbf{u})(\mathbf{v} - \mathbf{u})\, f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\, d^3\mathbf{v} = nm\langle\mathbf{vv}\rangle - nm\mathbf{uu}$

Maxwell 分布の場合　$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} nT_\perp & 0 & 0 \\ 0 & nT_\perp & 0 \\ 0 & 0 & nT_\parallel \end{pmatrix}$

$\partial(nm\mathbf{u})/\partial t + \nabla\cdot \mathbf{P} + m\nabla\cdot(n\mathbf{uu}) = nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$

連続の式 $\partial n/\partial t + \nabla\cdot(n\mathbf{u}) = 0$ および $\partial/\partial x_i\, nu_iu_j = u_j\, \partial/\partial x_i(nu_i) + nu_i\, \partial u_j/\partial x_i$ を使って

momentum balance eq.　$nm[\partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}] = nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla\cdot \mathbf{P}$

convective derivative:　$d\mathbf{u}/dt = \partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$

エネルギーバランスの式　$mv^2/2$ モーメント

$\partial\varepsilon/\partial t + \nabla\cdot\mathbf{Q} = nq\, \mathbf{u}\cdot\mathbf{E}$

energy density　$\varepsilon = 1/2\, nm\langle v^2\rangle$

heat flow vector　$\mathbf{Q} = 1/2\, nm\langle v^2\mathbf{v}\rangle$

hierarchy を閉じる必要がある

状態方程式　eq. of state　$p = Cn^\gamma$　$(pV^\gamma = \mathrm{const})$

isothermal ($\gamma = 1$)　　　圧縮の時間スケール　熱伝導より遅い

adiabatic [$\gamma = (2 + N)/N$]　（N:自由度）　　　熱伝導より速い

等方的　$\gamma = 5/3$（N = 3）　　衝突による自由度間のエネルギー交換より遅い

非等方的　$\gamma = 2$（N = 2）$T_\perp$　衝突による自由度間のエネルギー交換より速い

$\gamma = 3$（N = 1）$T_\parallel$

+ Maxwell eqs.

二流体方程式

衝突による運動量の交換が無視できない場合

α種の粒子がβ種の粒子との衝突により得る運動量（単位時間、単位体積あたり）

collisional momentum transfer $\mathbf{R}_{\alpha\beta} = -m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)$

$\nu_{\alpha\beta}$: collision frequency

momentum balance eq.

$$nm[\partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}] = nq(\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B}) - \nabla\cdot\mathbf{P} + \sum_\beta \mathbf{R}_{\alpha\beta}$$

プラズマの電気抵抗

一様な水素プラズマ（$Z_i = 1$）では、$\nabla\cdot\mathbf{P} = 0$, $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = 0$

定常状態（$\partial/\partial t = 0$）において、磁力線に沿った成分は

$0 = -n_e e E_\parallel + R_{ei\parallel}$

$j_\parallel = -n_e e(u_{e\parallel} - u_{i\parallel})$

これらをまとめると

$E_\parallel = -m_e\nu_{ei}/e\,(u_{e\parallel} - u_{i\parallel}) = m_e\nu_{ei}/(n_e e^2)\, j_\parallel$

$\eta = m_e\langle\nu_{ei}\rangle/(n_e e^2)$

（ν_{ei} は e の速度に依存するので、プラズマ全体を考える場合、速度分布で平均する）

$\mathbf{R}_{ei} = -m_e n_e\langle\nu_{ei}\rangle\,(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) = \eta\, n_e e\,\mathbf{j}$

一般的にはテンソル

$$\begin{pmatrix} \eta_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \eta_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \eta_\parallel \end{pmatrix}$$

1 keV のプラズマの電気抵抗は Cu と同程度

反磁性ドリフト

momentum balance

$$mn[\partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] = nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$u \sim (kr_L)\, v_t$, $\partial/\partial t \sim \omega \sim ku$ 程度の大きさのドリフトを考える。

ここで $kr_L \sim r_L/L << 1$（L は空間的変化のスケール長），　$v_t \sim (T/m)^{1/2}$ は熱速度。

上式左辺は $mn\, (kr_L)^2\, kv_t^2$,　右辺は $mn\, kv_t^2$ なので、左辺 / 右辺 $\sim (kr_L)^2 << 1$。

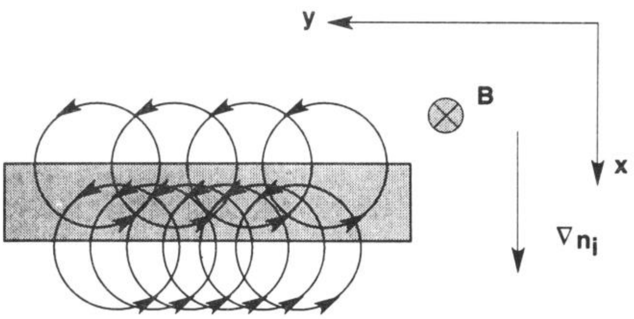
$$nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cong \nabla \cdot \mathbf{P} \quad \leftarrow \quad \times \mathbf{B}$$

$$nq[\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{u}B^2 + \mathbf{B}\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})] = \nabla \cdot \mathbf{P} \times \mathbf{B}$$

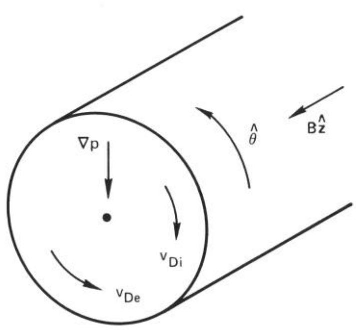
$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2 + \mathbf{B} \times \nabla \cdot \mathbf{P} / (nqB^2)$$

E × **B** drift　　diamagnetic drift

$$\mathbf{j}_d = \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{u}_{\perp\alpha} = \mathbf{B} \times \nabla \cdot (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_e) / B^2 \quad \text{diamagnetic current}$$



反磁性ドリフトの生成機構



円柱プラズマの反磁性ドリフト

磁場に沿った方向の圧力平衡

$mn\, du_\parallel/dt = nqE_\parallel - \nabla_\parallel p$　　（pressure tensor がスカラーで表せる場合を考える）

イオン・電子が圧力勾配に反応する時間スケールは、それぞれ L/v_{ti}, L/v_{te}（$L/v_{ti} >> L/v_{te}$）。

時間変化が緩やかで定常流の無い場合を考えると、電子については左辺（慣性項）が無視でき、

$$0 = nqE_\parallel - \nabla_\parallel p \quad \rightarrow \quad -n_e e \nabla_\parallel \phi + \nabla_\parallel (n_e T_e) = 0$$

磁力線方向の熱伝導率は大きい　→　$\nabla_\parallel T_e = 0$　→　$-n_e e \nabla_\parallel \phi + T_e \nabla_\parallel n_e = 0$

積分して $\ln n_e - e\phi / T_e = \text{const.}$　→　$n_e \propto \exp(e\phi / T_e)$　　Boltzmann relation

圧力平衡を保つため電子は $\phi \propto T_e/e \ln n_e$ のポテンシャルを形成。

イオンの反応できる時間スケールは電子に比べてはるかに長いので慣性項は無視できず、

$$m_i n_i\, du_{i\parallel}/dt = -n_i e \nabla_\parallel \phi - \nabla_\parallel p_i = -T_e \nabla_\parallel n_e - \nabla_\parallel p_i$$

更に $\nabla_\parallel T_i = 0$ であれば $m_i n_i\, du_{i\parallel}/dt = -(T_e + T_i) \nabla_\parallel n_e$

単一流体 MHD（Single-Fluid MHD）

MHD: magnetohydrodynamic

H プラズマを考える。

$M = m_i$, $m = m_e$

$n = n_e \cong n_i$ charge neutrality（$\lambda_D << L$）

流体変数を定義

$\rho = n_i M + n_e m \cong nM$ mass density

$\sigma_e = (n_i - n_e)e$ charge density

$\mathbf{u} = (n_i M \mathbf{u}_i + n_e m \mathbf{u}_e) / \rho \cong \mathbf{u}_i + (m/M)\,\mathbf{u}_e$ mass velocity　　$\mathbf{u}_i = \mathbf{u} + (m/M)\,\mathbf{j}/(ne)$

$\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) \cong ne\,(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$ current density　　$\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - \mathbf{j}/(ne)$

continuity equation

$\partial n_{i,e}/\partial t + \nabla\cdot(n_{i,e}\mathbf{u}_{i,e}) = 0$　　$\underline{\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0}$

$\underline{\partial\sigma_e/\partial t + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0}$

equation of motion

$Mn_i\, d\mathbf{u}_i/dt = en_i\,(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nabla p_i + \mathbf{R}_{ie}$　　$\underline{\rho\, d\mathbf{u}/dt = \rho\,(\partial\mathbf{u}/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) = \sigma_e\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \nabla p}$

$mn_e\, d\mathbf{u}_e/dt = -en_e\,(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nabla p_e + \mathbf{R}_{ei}$　　single-fluid eq. of motion　（$p = p_e + p_i$）

$\mathbf{R}_{ei} = mn\,\langle\nu_{ei}\rangle\,(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = \eta\, ne\,\mathbf{j}$

低周波数では電子の慣性は無視できる。

$\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} = \eta\mathbf{j} - \nabla p_e / (ne)$　　$\underline{\mathbf{E} + \mathbf{u}\times\mathbf{B} = \eta\mathbf{j} + (\mathbf{j}\times\mathbf{B} - \nabla p_e) / (ne)}$

generalized Ohm's law

equation of state

adiabatic　$\underline{d(p/\rho^\gamma) / dt = 0}$

isothermal　$p = n\,(T_e + T_i)$

Maxwell's equations

$\underline{\nabla\times\mathbf{E} = -\,\partial\mathbf{B}/\partial t}$　　$\underline{\nabla\cdot\mathbf{B} = 0}$

$\underline{\nabla\times\mathbf{B} = 1/c^2\,\partial\mathbf{E}/\partial t + \mu_0\mathbf{j}}$　　$\underline{\nabla\cdot\mathbf{E} = \sigma_e/\varepsilon_0}$

更に以下の近似が成り立つ場合が多い。

Quasi-neutrality approximation

$|\,n_i - n_e\,| << n$

$\rho/(\varepsilon_0 B^2) = \omega_{pi}^2/\omega_{ci}^2 >> 1$ の場合、$\partial\sigma_e/\partial t$, $\sigma_e\mathbf{E}$ の項を無視できる。

Small Larmor radius approximation

巨視的なプラズマ（$r_{Li} << L$）において、強い MHD 不安定性による発達した流れがあるとき［$v_E = E/B$, $v_{ti} = (T/m)^{1/2}$ として $u \sim v_E \sim v_{ti}$］、generalized Ohm's law で $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ および ∇p_e の項を無視できる。この場合、

Ohm's law $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$

MHD eqs. $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0$

$\nabla\cdot \mathbf{j} = 0$

$\rho\, d\mathbf{u}/dt = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$

Maxwell's eqs. $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

これらを MHD 方程式系といい、プラズマの巨視的なふるまいを表す。

Infinite conductivity approximation

高温プラズマでは電気抵抗は小さいので、電気伝導度は無限大であるという近似が成り立つことが多い。これを理想的 MHD（ideal MHD）近似といい、このとき Ohm's law は $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$ と書ける。これより次の重要な性質が導かれる。

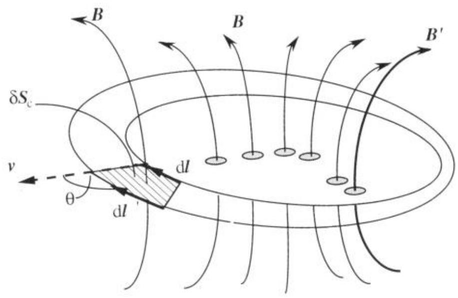
プラズマと一緒に動く任意の面 $\mathbf{S}$ を考えると、この面を横切る磁束 $\Phi = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$ の時間変化は

$$d\Phi/dt = \int \partial\mathbf{B}/\partial t \cdot d\mathbf{S} + \oint \mathbf{B}\cdot(\mathbf{u}\times d\mathbf{l})$$

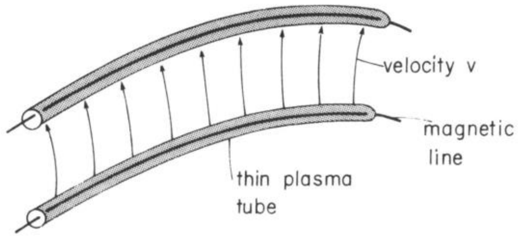
と表される（$d\mathbf{l}$ は $\mathbf{S}$ の境界に沿った線分を表す）。$\partial\mathbf{B}/\partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$ を用いると

$$d\Phi/dt = -\oint (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

となり、理想的 MHD 近似が成り立つときは、$\mathbf{S}$ を横切る磁束は保存されることがわかる。特殊な場合として、$\mathbf{S}$ を磁力線に沿った細いチューブの断面とすると、磁力線はプラズマと一緒に動くことが導かれる。これは理想的 MHD 近似の成り立つ時は、磁力線のトポロジーは変化し得ないという重要な意味を持っている（有限な電気抵抗がある場合にはこの制約はなくなる）。



磁束の保存



磁力線とプラズマの運動

<u>磁気レイノルズ数（magnetic Reynolds number）</u>

有限な電気抵抗があるとき、磁場の時間変化は以下のように表せる。

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = -\nabla\times\mathbf{E} = \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) - \nabla\times(\eta\mathbf{j}) = \underbrace{\nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})}_{\text{convection}} + \underbrace{(\eta/\mu_0)\nabla^2\mathbf{B}}_{\text{diffusion}}$$

スケール長を L とすると

(対流項) / (拡散項) ~ $\mu_0 uL/\eta = R_M$　magnetic Reynolds number (Lundquist number)

$R_M >> 1$ のとき、電気伝導度が無限大である（電気抵抗が 0）という近似が成り立つ。

<u>MHD 平衡</u>

プラズマの運動

↑　　　↓　　self-consistent な平衡配位

磁場 ← 電流

等方的圧力の場合（$\nabla\cdot\mathbf{P} = \nabla p$）の静的定常状態（$\partial/\partial t = 0$, $\mathbf{u} = 0$）を考える。

$$\nabla p = \mathbf{j}\times\mathbf{B}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$$

を連立して解く。

$$\nabla p = (1/\mu_0)(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} = (1/\mu_0)[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B} - \nabla(B^2/2)]$$

$$\nabla[p + B^2/(2\mu_0)] = (1/\mu_0)[B(\mathbf{b}\cdot\nabla)(B\,\mathbf{b})] = \underbrace{(B^2/\mu_0)(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{b}}_{\text{bending}} + \underbrace{\mathbf{b}(\mathbf{b}\cdot\nabla)B^2/(2\mu_0)}_{\text{parallel compression}}$$

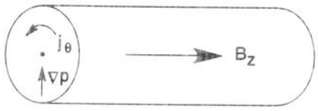
B がまっすぐで平行の場合は、$p + B^2/(2\mu_0) = \text{const.}$

$\beta \equiv 2\mu_0 p / B^2$ = (プラズマの圧力) / (磁場の圧力) は磁場によるプラズマ閉じ込めの有効性を表す。

βがある値を超えると MHD 不安定性が起こり、平衡が保てなくなる。

プラズマの MHD 平衡の例（円柱対称系）

θ-pinch（B_z, j_θが有限）

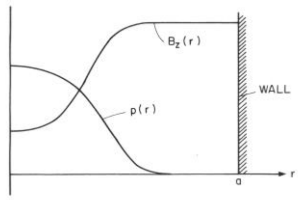


$j_\theta = -(1/\mu_0)\, dB_z/dr$,　$j_\theta B_z = dp/dr$ より

$$d/dr\,[p + B_z^2/(2\mu_0)] = 0 \quad \rightarrow \quad p(r) + B_z^2\,(r)\,/(2\mu_0) = B_0^2/(2\mu_0)$$

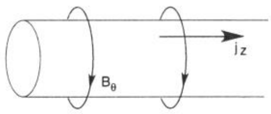
$B_z\,(r = a) = B_0$　（B_0は外部より与えられた磁場）

プラズマの圧力は外部磁場により支えられている。



平衡のため必要なプラズマ電流

$\mathbf{j}_\perp = \mathbf{B} \times \nabla p\,/\,B^2$　（diamagnetic current）



z-pinch（B_θ, j_z が有限）

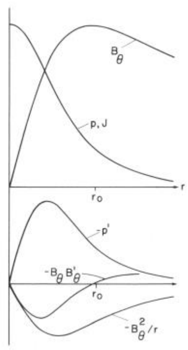
$j_z = (1/\mu_0 r)\, d/dr\,(rB_\theta)$,　$j_z B_\theta = -\,dp/dr$ より

$$d/dr\,[p + B_\theta^2/(2\mu_0)] + B_\theta^2/(\mu_0 r) = 0 \quad \rightarrow \quad p(r) = p_0 - B_\theta^2\,(r)\,/(2\mu_0) - (1/\mu_0)\int_0^r B_\theta^2(r)/r\,dr$$

↑　　　　　　$p_0 = p(r = 0)$

磁場の張力（磁力線の曲率による）

プラズマの圧力は磁場の張力により支えられている。



screw pinch（B_z, B_θ, j_z, j_θが有限）

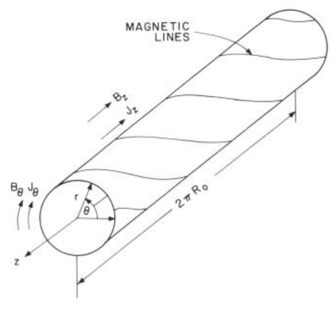
$j_z = (1/\mu_0 r)\, d/dr\,(rB_\theta)$,　$j_\theta = -(1/\mu_0)\, dB_z/dr$,　$j_\theta B_z - j_z B_\theta = dp/dr$

$$d/dr\,[p + (B_\theta^2 + B_z^2)/(2\mu_0)] + B_\theta^2/(\mu_0 r) = 0$$

$$\rightarrow \quad p(r) + B_z^2\,(r)\,/(2\mu_0) = p_0 + B_{z0}^2/(2\mu_0) - B_\theta^2\,(r)\,/(2\mu_0) - (1/\mu_0)\int_0^r B_\theta^2(r)/r\,dr$$

$B_{z0} = B_z(r = 0)$

トカマクは screw pinch をトーラス化したもの。



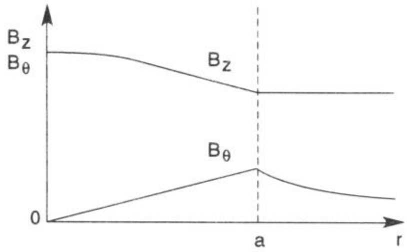
low β平衡（∇p が無視できる場合）

$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$　（force-free equilibrium）

$d/dr\,(B_\theta^2 + B_z^2)/(2\mu_0) + B_\theta^2/(\mu_0 r) = 0$

$\rightarrow\quad B_z^2\,(r) = B_{z0}^2 - B_\theta^2\,(r) - 2\int_0^r B_\theta^2\,(r)/r\,dr$

B_z (r=0)はB_z (r=a)より大きい（paramagnetic）



電気抵抗による散逸

有限な電気抵抗による散逸　→　熱平衡状態（一様な圧力）に近づく

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta\mathbf{j} \rightarrow \partial\mathbf{B}/\partial t = \underbrace{\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}_{\text{convection}} + \underbrace{(\eta/\mu_0)\,\nabla^2\mathbf{B}}_{\text{diffusion}}$$

B_z の存在するところに急激に j_z を流した場合の B_θの時間変化を考える（$B_z >> B_\theta$）。

z 成分　$0 = -1/r\,\partial/\partial r\,(r u_r B_z) + (\eta/\mu_0)\,1/r\,\partial/\partial r\,(r\,\partial B_z/\partial r)$　→　$u_r = \eta/(\mu_0 B_z)\,\partial B_z/\partial r \cong -(\eta/B_z^2)\,\partial p/\partial r$

（$p + B_z^2/(2\mu_0) \cong$ const.より）

θ成分　$\partial B_\theta/\partial t = \underbrace{-\,\partial/\partial r\,(u_r B_\theta)}_{\uparrow} + (\eta/\mu_0)\,\partial/\partial r[1/r\,\partial/\partial r(rB_\theta)]$　→　$\partial B_\theta/\partial t \cong (\eta/\mu_0)\,\partial/\partial r[1/r\,\partial/\partial r(rB_\theta)]$

（磁場の拡散方程式）

第 2 項（拡散項）に比べ O(β)小さい

拡散の時間スケール　$\tau \sim (\mu_0/\eta)L^2$

最初は表面のみに電流が流れ（表皮効果）、プラズマ中に B_θは存在しない。

$\tau \sim (\mu_0/\eta)L^2$ の時間スケールで B_θは拡散し（有限な電気抵抗が必要）、j_z および B_θの分布が形成される。