

Unit 1. 単一荷電粒子の運動

一様な電磁場中の粒子ドリフト

粒子の運動方程式 $m \, d\mathbf{v}/dt = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

一様な磁場のみを考える $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}/B = \hat{\mathbf{z}}$ (解は磁力線に巻きつく螺旋運動)

$$dv_x/dt = qv_y B / m \quad \rightarrow \quad d^2 v_x / dt^2 = -(qB/m)^2 v_x = -\omega_c^2 v_x$$

$$dv_y/dt = -qv_x B / m \quad \text{サイクロトロン運動 (ジャイロ運動)}$$

$$dv_z/dt = 0$$

cyclotron frequency (gyro frequency) 角周波数を単に周波数と呼ぶ

$$\omega_c \equiv |q|B/m \quad \omega_{ce} = eB/m_e$$

$$\omega_{ci} = Z_i eB/m_i$$

複素表示を用いた解 (実部をとる): 初期値を (v_{xi}, v_{yi}, v_{zi}) , (x_i, y_i, z_i) とすると

$$v_x = v_{\perp} \exp(i\omega_c t + i\delta)$$

$$v_y = \pm i v_{\perp} \exp(i\omega_c t + i\delta) \quad \text{イオンが上、電子が下の符号 (回転方向を表す)}$$

$$v_z = v_{zi}$$

$$\text{但し } v_{\perp} = (v_{xi}^2 + v_{yi}^2)^{1/2}, \quad \tan \delta = \mp v_{yi} / v_{xi}$$

これを時間積分して

$$x = x_i - i v_{\perp} / \omega_c [\exp(i\omega_c t + i\delta) - \exp(i\delta)]$$

$$y = y_i \pm v_{\perp} / \omega_c [\exp(i\omega_c t + i\delta) - \exp(i\delta)]$$

$$z = z_i + v_{zi} t$$

Larmor radius (gyro radius)

$$r_L \equiv v_{\perp} / \omega_c$$

$$W_{\perp} = m v_{\perp}^2 / 2 \quad \text{を使うと}$$

$$v_{\perp} = (2W_{\perp}/m)^{1/2} \quad \rightarrow \quad r_L = (2mW_{\perp})^{1/2} / |q|B$$

一様磁場中の荷電粒子の運動



ジャイロ周期で平均すると guiding center (ジャイロ運動の中心) の軌跡が求まる。

$$x_{gc} = x_i + i v_{\perp} / \omega_c \exp(i\delta) \quad x = x_{gc} - i v_{\perp} / \omega_c \exp(i\omega_c t + i\delta)$$

$$y_{gc} = y_i \mp v_{\perp} / \omega_c \exp(i\delta) \quad y = y_{gc} \pm v_{\perp} / \omega_c \exp(i\omega_c t + i\delta)$$

$$z_{gc} = z_i + v_{zi} t \quad z = z_{gc}$$

粒子の軌道は guiding center の運動 + ジャイロ運動で表される。

ジャイロ運動は反磁性 (diamagnetic) 方向 (磁場を打ち消す方向)。

外力が加わった場合 → guiding center のドリフト運動

$$m \, d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

定常状態 (左辺 = 0) で $\hat{\mathbf{b}}$ との外積をとる。

$$q \hat{\mathbf{b}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{b}}$$

$$(\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{b}})\mathbf{v} - (\hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v})\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{v} - v_{\parallel}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{b}} / qB$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{F} \times \mathbf{B} / qB^2$$



電場および重力による荷電粒子のドリフト運動

重力の場合 ($\mathbf{F} = m\mathbf{g}$)

$$\mathbf{v}_{\perp} = m \mathbf{g} \times \mathbf{B} / qB^2 \quad (\text{重力ドリフト})$$

電荷、質量に依存 → 電流 → 荷電分離 → 電場

電場の場合 ($\mathbf{F} = q\mathbf{E}$)

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2 \quad (\mathbf{E} \times \mathbf{B} \text{ ドリフト})$$

電荷、質量、速度によらず、全ての粒子が同じ速度で動く → プラズマ全体の流れ

非一様磁場中のドリフト

y 方向に弱い勾配のある磁場を考える (磁場勾配のスケール L が Larmor 半径 r_L より大きい)。

粒子に働く力は

$$F_y = -q v_x B_z(y) = -q v_x [B_0 + y \partial B / \partial y] = -q v_{\perp} \cos(\omega_c t) [B_0 \pm r_L \cos(\omega_c t) \partial B / \partial y]$$

これをジャイロ周期で平均すると

$$F_y = -q v_{\perp} \cos(\omega_c t) [B_0 \pm r_L \cos(\omega_c t) \partial B / \partial y]$$

$$\bar{F}_y = \mp q v_{\perp} r_L (\partial B / \partial y) / 2$$

対称性により $\bar{F}_x = 0$ 。

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{F} \times \mathbf{B} / qB^2 = \mp v_{\perp} r_L (\partial B / \partial y) / 2B \hat{\mathbf{x}}$$

一般化すると ($W_{\perp} = mv_{\perp}^2 / 2$ を使って)

$$\mathbf{v}_{\perp} = \pm v_{\perp}^2 \mathbf{B} \times \nabla B / 2\omega_c B^2 = W_{\perp} \mathbf{B} \times \nabla B / qB^3 \quad (\nabla B \text{ ドリフト})$$

磁力線が曲がっている場合（曲率半径 R_c ）

磁力線に沿って運動している粒子は遠心力を受ける。

$$\mathbf{F}_{cf} = m v_{\parallel}^2 / R_c \hat{\mathbf{r}} = m v_{\parallel}^2 \mathbf{R}_c / R_c^2$$

これによるドリフトは ($W_{\parallel} = m v_{\parallel}^2 / 2$ を使って)

$$\mathbf{v}_{\perp} = m v_{\parallel}^2 \mathbf{R}_c \times \mathbf{B} / q B^2 R_c^2 = 2 W_{\parallel} \mathbf{R}_c \times \mathbf{B} / q B^2 R_c^2 \quad (\text{曲率ドリフト})$$

磁気モーメントの保存

z 方向に弱い磁場勾配のある場合を考える (磁場勾配のスケール L が Larmor 半径 r_L より大きい)。

この場合、サイクロトロン運動に伴う断熱不変量が存在し、

$$J_1 = \oint p_{\theta} dq_{\theta} = m \int_0^{2\pi} v_{\theta} r d\theta = 2\pi r_L m v_{\perp} = 2\pi m v_{\perp}^2 / \omega_c$$

ここで $m v_{\perp}^2 / \omega_c$ はサイクロトロン運動をする粒子の角運動量であり、この粒子の持つ磁気モーメント μ に比例する。

$$\mu = q(\omega_c / 2\pi) \pi r_L^2 = m v_{\perp}^2 / 2B = W_{\perp} / B$$

磁場強度の変化がゆるやかであれば、粒子の guiding center が磁場に沿って移動する際に μ は保存されるので、垂直エネルギー $W_{\perp} = m v_{\perp}^2 / 2$ (磁力線に垂直方向の運動エネルギー) は磁場強度に比例して変化する。磁力線に平行方向の運動エネルギー $W_{\parallel} = m v_{\parallel}^2 / 2$ は、総運動エネルギーを W (= const.) として以下の関係を保って変化する。

$$m v_{\parallel}^2 / 2 + \mu B = W$$

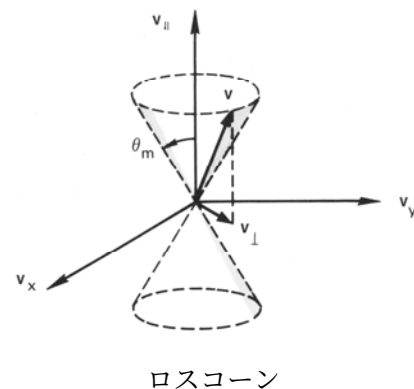
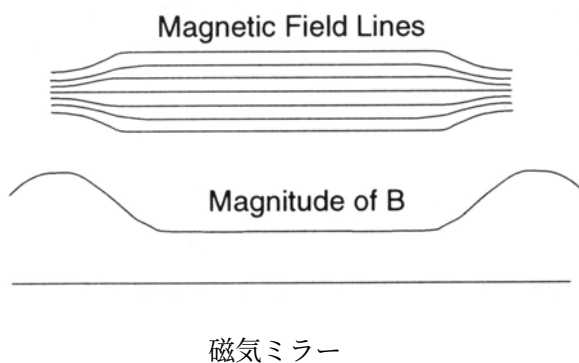
これより、 μB が W と等しくなった点で、 $v_{\parallel}$ はゼロとなり粒子は反射されることがわかる。

磁場に沿った方向に粒子が受ける力は、 $\mathbf{s}$ を磁力線方向の位置ベクトルとし時間微分すると

$$m \mathbf{v}_{\parallel} \cdot d\mathbf{v}_{\parallel} / dt = -\mu dB / dt = -\mu \partial B / \partial s \cdot d\mathbf{s} / dt$$

ここで $d\mathbf{s} / dt = \mathbf{v}_{\parallel}$ なので

$$\mathbf{F}_{\parallel} = m d\mathbf{v}_{\parallel} / dt = -\mu \partial B / \partial s = -\mu \nabla_{\parallel} B$$



この反射を用いた閉じ込め方式を磁気ミラーと呼ぶ。しかし $mv_{\parallel}^2 / 2$ ($B = B_{\min}$ での値) が、 $\mu(B_{\max} - B_{\min})$ より大きい粒子は反射されない。

$$\tan \theta = v_{\perp} / v_{\parallel}$$

で定義される角をピッチ角 (pitch angle) と呼ぶが、ピッチ角が以下で定義される θ_m より小さい粒子は反射されず損失する。この領域を loss cone と呼ぶ。

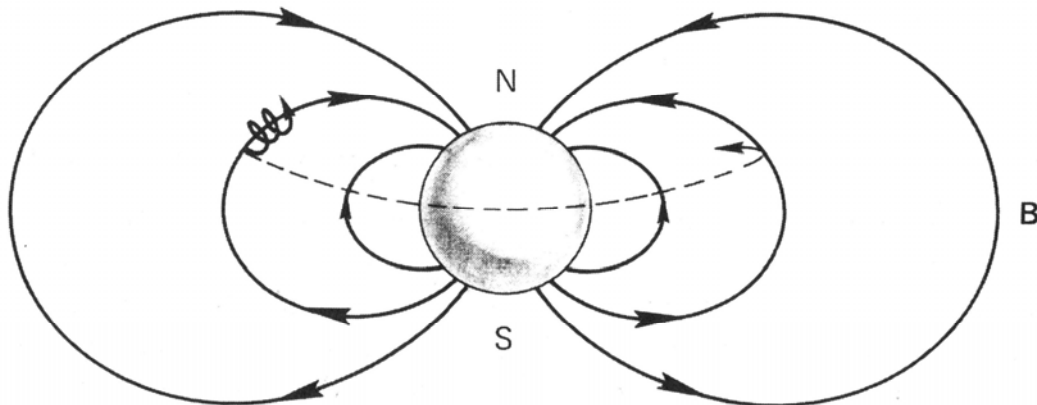
$$\tan \theta_m = [B_{\min} / (B_{\max} - B_{\min})]^{1/2}$$

縦方向の保存量

ミラー磁場に捕捉されている粒子の guiding center は、磁場に沿った周期運動をする。ドリフトにより反射点は変化するが、軸対称性からのずれが小さければ粒子の g. c. は準周期運動をし、

$$J = m \oint v_{\parallel} ds$$

は保存される。ここで ds は磁力線に沿った距離で、積分は一周期にわたって行う。これを縦の断熱不変量 (または第二の断熱不変量) と呼ぶ。



地球の双極子磁場中の荷電粒子の運動

時間変化のある電磁場中のドリフト

ω_0 で振動する電場 $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t$ を考える。磁場が無い場合の粒子速度、位置は $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \Delta \mathbf{r}(t)$ と表され、

$$\Delta \mathbf{v}(t) = q / (m \omega_0) \mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t, \quad \Delta \mathbf{r}(t) = -q / (m \omega_0^2) \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t$$

粒子の運動は電荷によるため、電子とイオンは逆向きに運動し、振動する電荷および電流をひき起こす。これを分極ドリフト (polarization drift) と呼ぶ。

$\hat{z}$ 方向の磁場 $\mathbf{B}$ がある場合を考える。磁場に平行方向の運動は磁場の影響を受けないので、垂直方向の運動のみを考える。磁場に垂直方向の電場 $\mathbf{E}_\perp$ を $\hat{x}$ 軸方向にとると、 $\mathbf{E}_\perp = \hat{x} E_{0x} \cos \omega_0 t$

$$dv_x/dt - \Omega v_y = q/m E_{0x} \cos \omega_0 t, \quad dv_y/dt + \Omega v_x = 0$$

この解は、電場の無い場合の解を $\mathbf{v}_{\perp 0}(t)$ 、電場により誘起された項を $\Delta \mathbf{v}_\perp(t)$ として、 $\mathbf{v}_\perp(t) = \mathbf{v}_{\perp 0}(t) + \Delta \mathbf{v}_\perp(t)$ と書ける。 $\Delta \mathbf{v}_\perp(t)$ は

$$\Delta v_x(t) = \Delta \bar{v}_x \sin \omega_0 t, \quad \Delta v_y(t) = \Delta \bar{v}_y \cos \omega_0 t$$

と表せる。これを運動方程式に代入して ($\omega_0^2 - \Omega^2 \neq 0$ の場合)

$$\Delta \bar{v}_x = \omega_0 / (\omega_0^2 - \Omega^2) q E_{0x} / m, \quad \Delta \bar{v}_y = \Omega / (\omega_0^2 - \Omega^2) q E_{0x} / m$$

電場に垂直方向のドリフトは $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトで

$$\Delta \mathbf{v}_E(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega_0^2} \frac{\mathbf{E}(t) \times \mathbf{B}}{B^2}$$

と表せ、電場方向のドリフトは分極ドリフトで

$$\Delta \mathbf{v}_p(t) = \frac{q}{m} \frac{1}{\Omega^2 - \omega_0^2} \frac{\mathbf{B} \times [d\mathbf{E}(t)/dt \times \mathbf{B}]}{B^2}$$

と表せる。これらはどちらも $\omega_0^2 \rightarrow \Omega^2$ に従って無限に大きくなる。これをサイクロトロン共鳴と言ひ、粒子は波のエネルギーを効率良く吸収する (詳しくは後述)。

Hamiltonian Map と chaos (Goldston & Rutherford, Chap. 5)

$J = m \oint v_\parallel ds$ が保存しない場合

双極子磁場 $+ \cos(n\theta)$ の摂動 (電場または磁場)

Poincaré plot

摂動の無い場合

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \theta_p|_{r_0} + \theta_p'(r_j - r_0)$$

$$r_{j+1} = r_j$$

摂動の有る場合

$$\theta_{j+1} = \theta_j + \theta_p|_{r_0} + \theta_p'(r_j - r_0)$$

$$r_{j+1} = r_j + \varepsilon \cos(n\theta_{j+1})$$

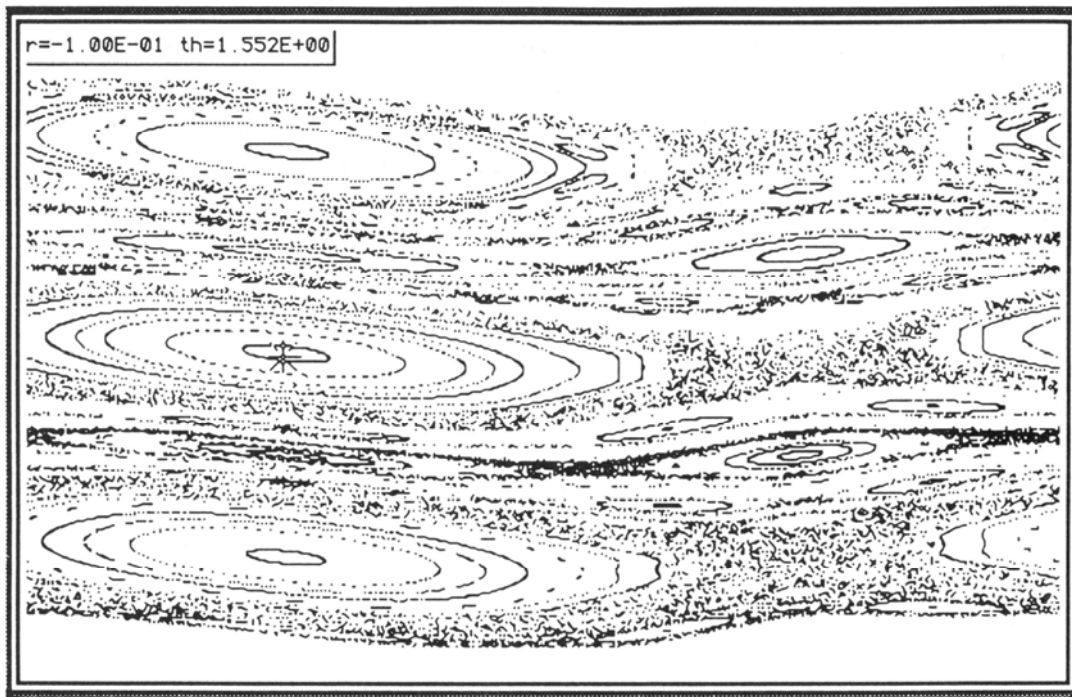
Chirikov-Taylor map (Standard map)

$\Delta = \varepsilon n \theta_p'$ により topology が決まる。

$\Delta \geq 1/4 \rightarrow$ separatrix 付近で stochastic (ergodic)

island が重なり合い、どちらの island に属しているかわからなくなる。

$\Delta \geq 1 \rightarrow$ secondary island の出現



Chirikov-Taylor map の例

非 Hamilton 系（エネルギーの流入、散逸のある系）

dissipative map $\rightarrow$ attractor