計測情報処理　前半部レポート（その１）
（本資料は（http://fusion.k.u-tokyo.ac.jp/~ejiri/ejiri/report2019_1.pdf にあります）
〆切：５月 10 日、提出：ejiri@k.u-tokyo.ac.jp に PDF で送ってください。プログラムは不要です。

以下の３種のデータのフーリエ変換を行い、パワースペクトルを求めて、下のような図を描け。また、Parsval's law（パーシバルの公式）を確認せよ。
（１）下記の３つの信号を生成し、図１のグラフを描く。

$$\text{サンプル数16、時間幅1}s\text{、サンプリング時間}\frac{1}{16}=0.0625\,\mathrm{s}$$

$$\text{時間}\quad t=0,\frac{1}{16},\frac{2}{16},\ldots,\frac{15}{16}=0,0.0625,0..125,\ldots..,0.9375$$

$$\text{信号}\quad \mathrm{y}_1(t)=1\quad ([\mathrm{V}])$$

$$\text{信号}\quad \mathrm{y}_2(t)=\sin(2\pi\times 2\times t)\quad ([\mathrm{V}])$$

$$\text{信号}\quad \mathrm{y}_3(t)=\cos\left(2\pi\times\frac{3}{2}\times t\right)\quad ([\mathrm{V}])$$

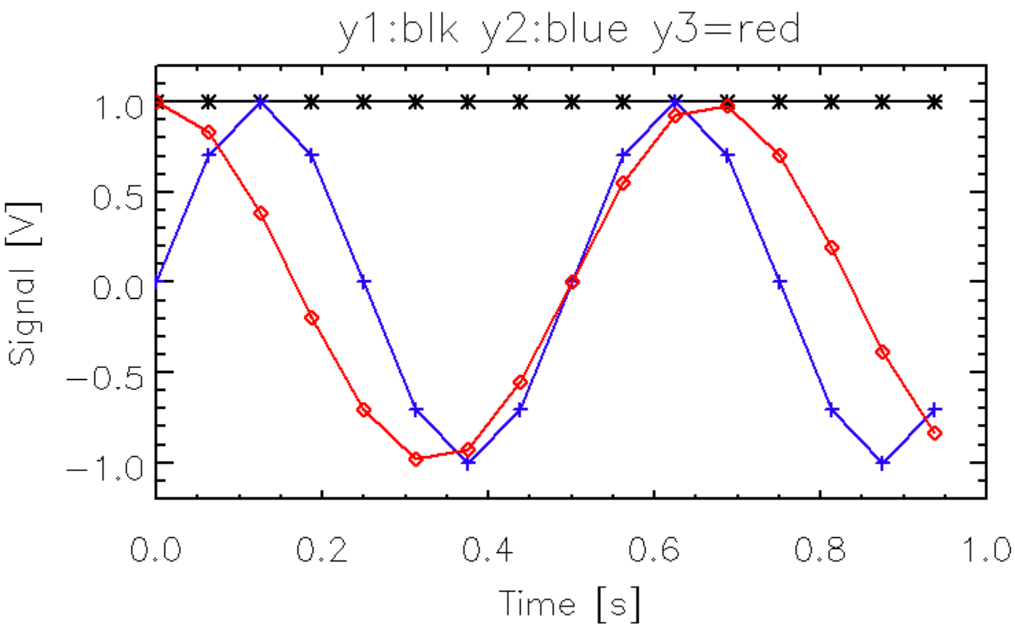


図１：信号 y_1, y_2, y_3 の時間変化

（２）信号 y_1, y_2, y_3 のパワースペクトル密度。
以下に注意して、縦軸を対数にしたパワースペクトル密度の図（図２）を描け。
時間幅が 1s であることから、周波数の間隔（基本周波数）はΔf=1 Hz である。また、ナイキスト周波数は 16/2=8 Hz であり、周波数は 0, 1, 2, …., 8 Hz となる。パワーはフーリエ変換した時の振幅の二乗であり、周波数が 1, 2, …, 7 Hz では、cos, sin 成分、または+ω, - ω の 2 つの和を取るのを忘れないように。0 Hz は直流成分であり、cos, sin または+ω, - ω の区別がなく、8Hz はナイキスト周波数なので、cos 成分のみを考慮する。
パワースペクトル密度は、パワーを周波数間隔Δf=1 Hz で割って、単位周波数あたりのパワーとしたもの。

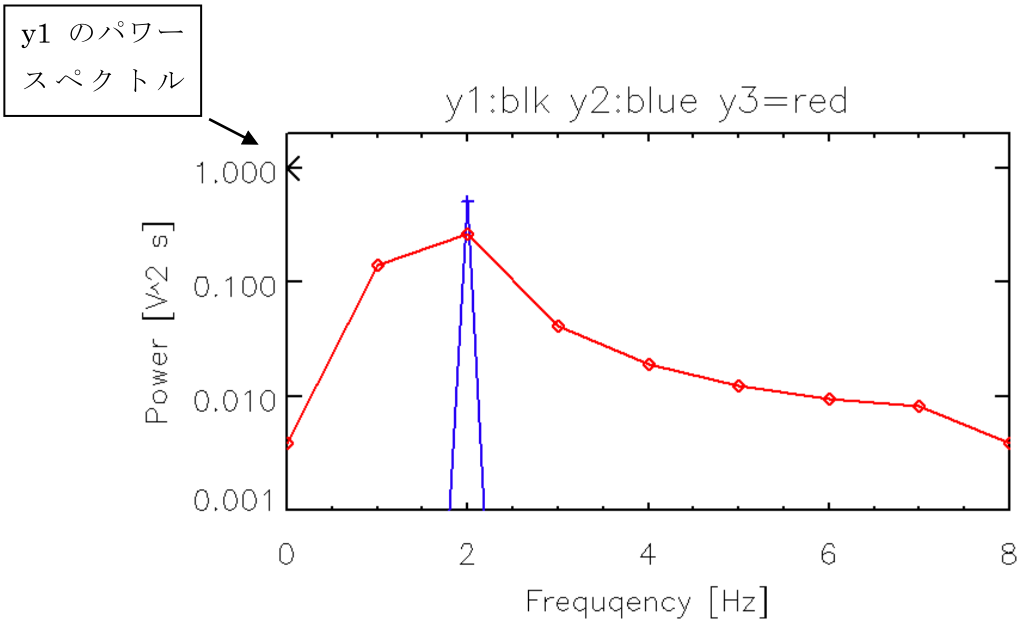


図 2：信号 y_1, y_2, y_3 のパワースペクトル密度

（3）パーシバルの公式を確認せよ。

信号の二乗平均は、

$$\langle y_1^2 \rangle = 1 \quad V^2、\langle y_2^2 \rangle = 0.5 \quad V^2、\langle y_3^2 \rangle = 0.5\ V^2$$

となる。これは総パワーを表すので、パワースペクトル密度の周波数積分と一致する。

$$\int P(f)df = \langle y^2 \rangle$$

これを y_1, y_2, y_3 について確認せよ。

参考

ライブラリ（ツール）:

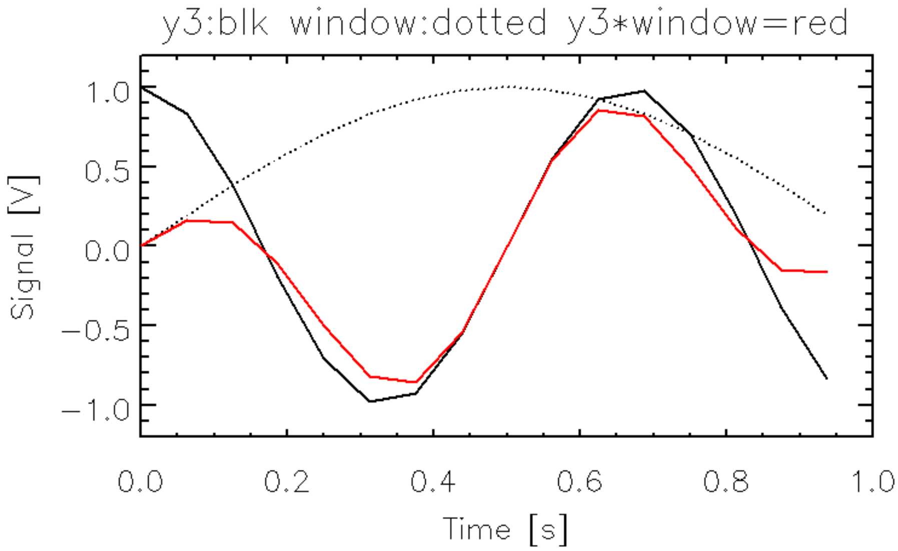
ライブラリは、フーリエ変換の定義や値の返し方にバリエーションがあり、全パワーの求め方が異なることもある。多くの場合、cos, sin ではなく、exp(iωt), exp(-iωt)で変換する。また、出力配列の順序は基本周波数をΔωとした時に、0, Δω, Δω,... ,(N/2) Δω, –(N/2–1) Δω,.....,–Δωと周波数がナイキスト周波数に達した後に負の最大周波数から始まるので注意が必要。

FFT：

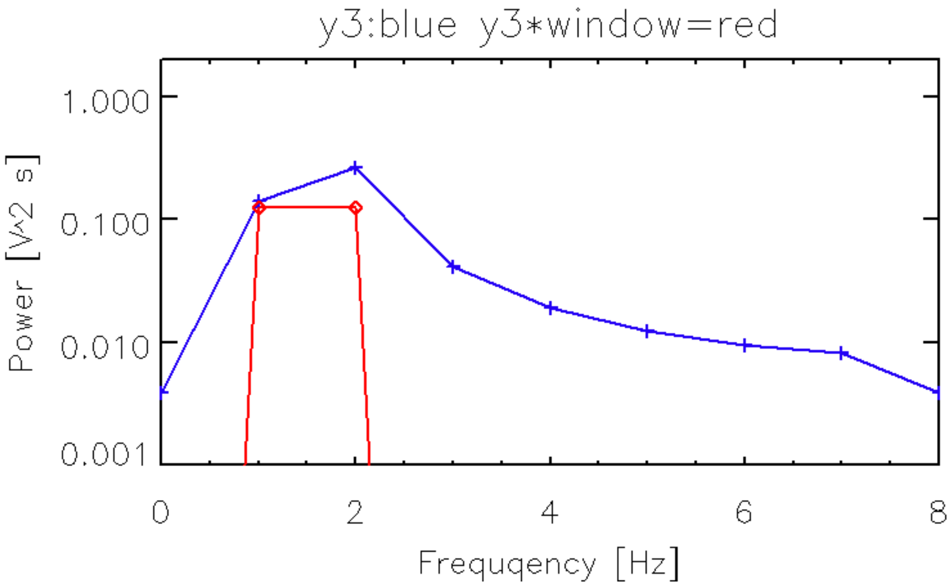
フーリエ変換時の計算量は N^2 に比例するが、重複した計算を省略し計算量を減らした手法に高速フーリエ変換（FFT）がある。これにより、計算量は N logN 程度となり、通常ライブラリは FFT を採用しているが、FFT が有効となるためには、N が特定の素数の n 乗の掛け合わせである必要がある。例えば、$N=2^a \times 3^b \times 5^c$。どのような素数の組み合わせが有効であるかはライブラリに依存する。

窓関数：

信号 y_3 は t=0, t=1 s で不連続なジャンプがあり、ギブス現象のために、高い周波数でパワーがある。これを回避するためには、窓関数をかけてからフーリエ変換をすればよい（参考図１、参考図２）。窓関数で両端の振幅が小さくなるため、Parsval's law からずれることに注意。



参考図１：信号 y_3（実線)、窓関数（点線)、窓関数をかけた信号（赤線)



参考図２：信号 y_3 のパワースペクトル密度（青線)、窓関数を用いた時のパワースペクトル密度（赤線)