

〆切: 5月13日、提出: [ejiri@k.u-tokyo.ac.jp](mailto:ejiri@k.u-tokyo.ac.jp)にPDFで送ってください。

以下の3種のデータのフーリエ変換を行い、パワースペクトルを求めて、下のような図を描け。また、Parsval's law (パーシバルの公式)を確認せよ。

(1) 下記の3つの信号を生成し、図1のグラフを描く。

サンプル数16、時間幅1s、サンプリング時間 $\frac{1}{16} = 0.0625$  s

時間  $t = 0, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \dots, \frac{15}{16} = 0, 0.0625, 0.125, \dots, 0.9375$

信号  $y_1(t) = 1$  ([V])

信号  $y_2(t) = \sin(2\pi \times 2 \times t)$  ([V])

信号  $y_3(t) = \cos\left(2\pi \times \frac{3}{2} \times t\right)$  ([V])

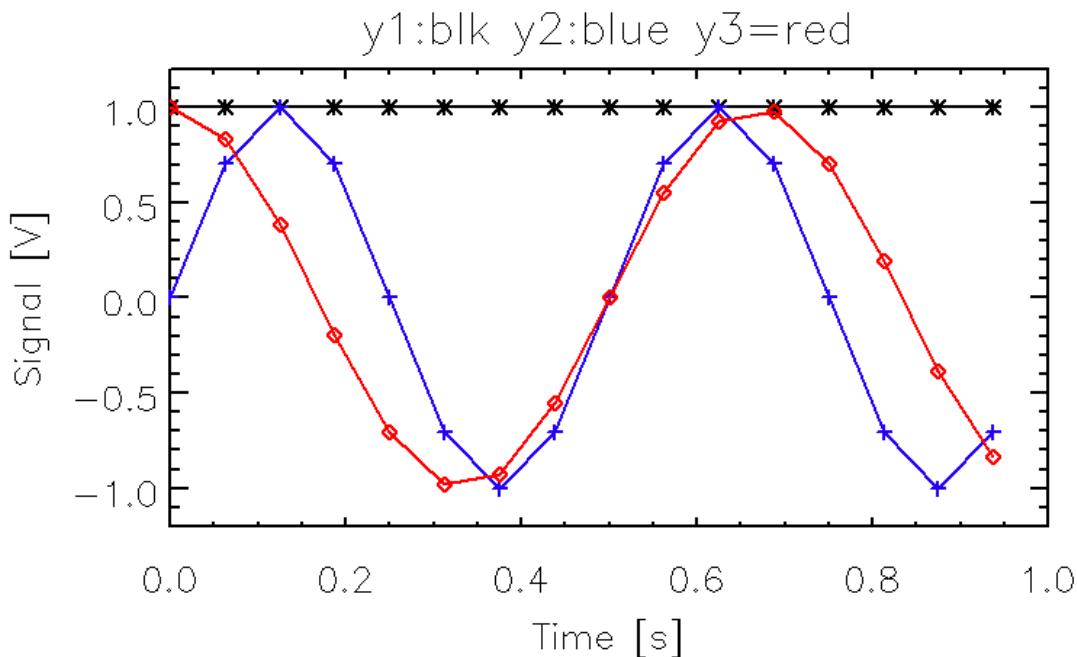


図1: 信号  $y_1, y_2, y_3$  の時間変化

(2) 信号  $y_1, y_2, y_3$  のパワースペクトル密度。

以下に注意して、縦軸を対数にしたパワースペクトル密度の図(図2)を描け。

時間幅が1sであることから、周波数の間隔(基本周波数)は $\Delta f = 1$  Hzである。また、ナイキスト周波数は $16/2 = 8$  Hzであり、周波数は $0, 1, 2, \dots, 8$  Hzとなる。パワーはフーリエ変換した時の振幅の二乗であり、周波数が $1, 2, \dots, 7$  Hzでは、 $\cos, \sin$ 成分、または $+\omega, -\omega$ の2つの和を取るのを忘れないように。0 Hzは直流成分であり、 $\cos, \sin$ または $+\omega, -\omega$ の区別がなく、8 Hzはナイキスト周波数なので、 $\cos$ 成分のみを考慮する。

パワースペクトル密度は、パワーを周波数間隔 $\Delta f = 1$  Hzで割って、単位周波数あたりのパワーとしたもの。

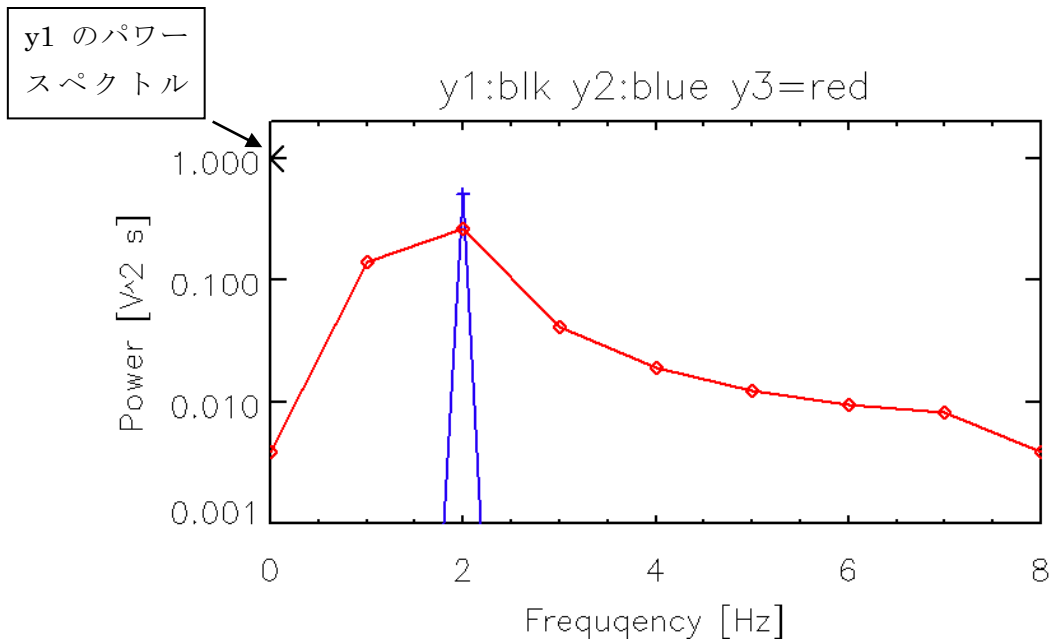


図 2 : 信号  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  のパワースペクトル密度

(3) パーシバルの公式を確認せよ。

信号の二乗平均は、

$$\langle y_1^2 \rangle = 1 \text{ V}^2, \langle y_2^2 \rangle = 0.5 \text{ V}^2, \langle y_3^2 \rangle = 0.5 \text{ V}^2$$

となる。これは総パワーを表すので、パワースペクトル密度の周波数積分と一致する。

$$\int P(f) df = \langle y^2 \rangle$$

これを  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  について確認せよ。

## 参考

ライブラリ (ツール) :

ライブラリは、フーリエ変換の定義や値の返し方にバリエーションがあり、全パワーの求め方が異なることもある。多くの場合、 $\cos$ ,  $\sin$  ではなく、 $\exp(i\omega t)$ ,  $\exp(-i\omega t)$  で変換する。また、出力配列の順序は基本周波数を  $\Delta\omega$  とした時に、 $0, \Delta\omega, \Delta\omega, \dots, (N/2) \Delta\omega, -(N/2-1) \Delta\omega, \dots, -\Delta\omega$  と周波数がナイキスト周波数に達した後に負の最大周波数から始まるので注意が必要。

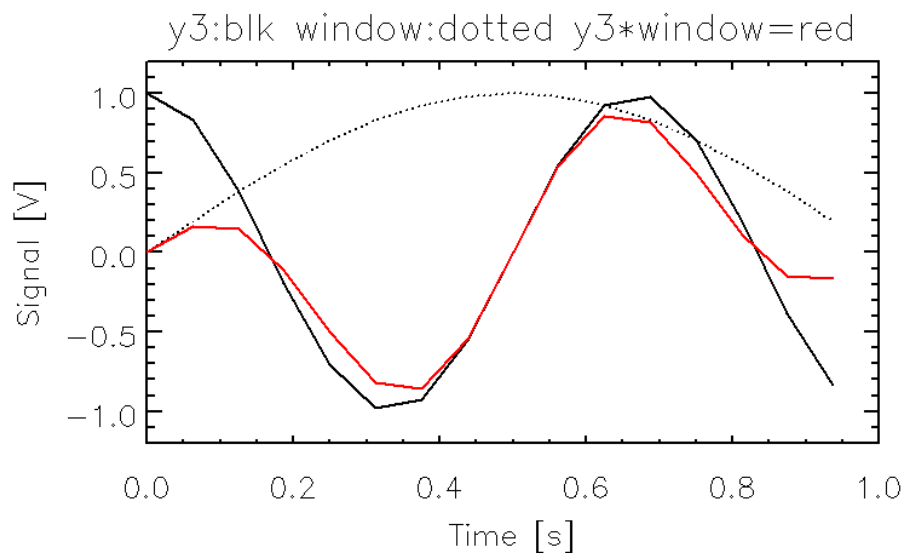
**FFT :**

フーリエ変換時の計算量は  $N^2$  に比例するが、重複した計算を省略し計算量を減らした手法に高速フーリエ変換 (FFT) がある。これにより、計算量は  $N \log N$  程度となり、通常ライブラリは FFT を採用しているが、FFT が有効となるためには、 $N$  が特定の素数の  $n$  乗の掛け合わせである必要がある。例えば、 $N=2^a \times 3^b \times 5^c$ 。どのような素数の組み合わせが有効であるかはライブラリに依存する。

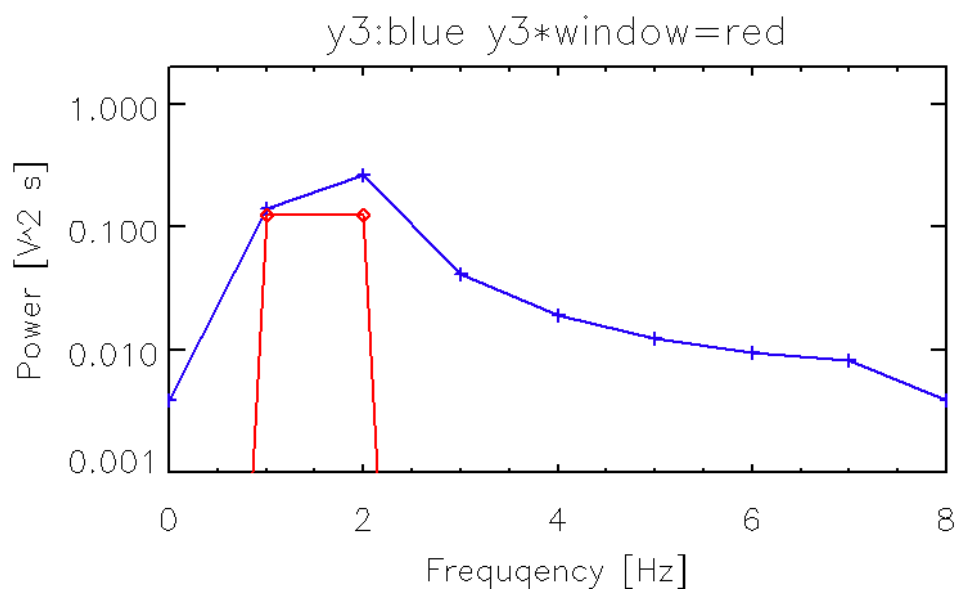
窓関数 :

信号  $y_3$  は  $t=0$ ,  $t=1$  s で不連続なジャンプがあり、ギブス現象のために、高い周波数でパワーがある。これを回避

するためには、窓関数をかけてからフーリエ変換をすればよい（参考図1、参考図2）。



参考図1：信号  $y_3$ （実線）、窓関数（点線）、窓関数をかけた信号（赤線）



参考図2：信号  $y_3$  のパワースペクトル密度（青線）、窓関数を用いた時のパワースペクトル密度（赤線）