目 次

1　拡散とランダムウォーク

1.1　様々な量の拡散と拡散係数

勾配のあるときの流れの経験則

- 粒子/密度 Fick の法則
  粒子束 $\Gamma = -D\frac{\partial n}{\partial x}$
- 運動量/速度 Newton の法則
  応力 $\Gamma = -\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}$
- エネルギー/温度 Fourier の法則
  熱流束 $Q = -\kappa\frac{\partial T}{\partial x}$

1.2　拡散方程式とその解

粒子の拡散を考える。
$f(x,t)dx$：時刻 t での $x \sim x + dx$ にある粒子数とする。
拡散方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{1}$$

この方程式の解の一つは

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{2}$$

これは、下記の性質を持つ

$$\lim_{t\to 0} f(x,t) = \delta(x) \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x,t) = 1 \tag{4}$$

$$\bar{x}^2 = 2Dt \tag{5}$$

1.3　１次元ランダムウォークの確率

空間・時間を離散的にとり、確率を考える。
$W(l,n)$：n ステップ後に l の位置に来る確率は、

$$\begin{aligned} W(l,n) &= {}_nC_{\frac{n+l}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n && (6)\\ &= \frac{n!}{((n+l)/2)!\,((n-l)/2)!} && (7)\\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\exp\left(-\frac{l^2}{2n}\right) \quad (n \gg |l| \gg 1) && (8) \end{aligned}$$

ここで，Stirling の公式

$$\log n! \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi$$

を用いた。

1.4　ランダムウォークの連続化

空間・時間の連続化

$$x = la, \quad t = n\tau \tag{9}$$

とすると、確率は

$$\begin{aligned} W(x,n)\Delta x &= W(l,n)\frac{\Delta x}{2a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)\Delta x && (10) \end{aligned}$$

ただし

$$D = \frac{a^2}{2\tau} \quad = \frac{[L]^2}{[T]} \tag{11}$$

1.5　拡散方程式の導出

$n+1$ ステップ後で x にある時、n ステップでは、$x-a$ またｈ $x+a$ に居た。従って

$$W(x,n+1) = \frac{1}{2}W(x-a,n) + \frac{1}{2}W(x+a,n) \tag{12}$$

これを連続化すると拡散方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t}\tau = \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{13}$$

が得られる。

1.6　平均到達距離

n ステップ後に x_n にある時、各ステップは独立なので

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_1 - x_0) + x_0 \tag{14}$$

さらに、各ステップ幅は $\pm a$ なので、期待値 x_n^2 は

$$\bar{x_n^2} = na^2 \quad = 2Dt \tag{15}$$

<u>2002/04/10</u>

2　ブラウン運動 (Brownian Motion)

2.1　外力のある時の拡散方程式

外力 $F(x)$ に対し、$v = \beta F(x)$ の速度（流れ）が発生するとき（ただし β は易動度、抵抗の逆数）

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial n}{\partial x} - \beta F n\right) \tag{16}$$

2.2 Einstein の関係式

平衡分布（例えば沈降平衡）を考える。

$$\Gamma = D\frac{\partial n}{\partial x} - \beta F n = 0, \qquad U(x) = -\int dx F(x) \tag{17}$$

が成立するとき、この解は

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\beta U(x)}{D}\right) \tag{18}$$

Maxwell 分布 $\Updownarrow$

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U(x)}{kT}\right) \tag{19}$$

となるとすると Einstein の関係式

$$D = \beta kT \tag{20}$$

が得られる。

半径 r の Brown 粒子を考える。ストークスの粘性抵抗（Renolds 数が小さく，慣性項が無視できるときの粘性）

$$\beta = \frac{1}{6\pi\eta r} \tag{21}$$

から。Einstein の関係式、平均到達距離は

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}, \qquad \bar{x^2} = 2Dt = \frac{kT}{3\pi\eta r}t \tag{22}$$

ブラウン運動の激しさ（$\bar{x^2}$）は温度，粘性，粒子径に依存することがわかる。

2.3 Einstein の関係式の別な見方

Brow 粒子の浸透圧を考える。密度勾配による力は

$$P = nkT \Rightarrow f^* = -\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}kT \tag{23}$$

これが外力 $f = -f^*$ と釣り合うと考える。外力 f 流れは $v = f/6\pi\eta r$ となる。これによる流束と拡散がつりあうとすると

$$\Gamma = -D\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{nf}{6\pi\eta r} = 0 \tag{24}$$

となり、$D = kT/6\pi\eta r$ が導かれる。

2.4 流れのある時のランダムウォーク

p：右へ行く確率、q：留まる確率

$$\begin{aligned} W(l,n) &= {}_nC_l p^l q^{n-l} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{(l-np)^2}{2pqn}\right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-vt)^2}{2\pi Dt}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

ただし、$D = pqa^2/\tau$、$v = pa/\tau$ であり，Stirling の公式を用いた。

2.5 ランジュバン方程式（Langevin Eq.）

揺動力（熱運動）を考慮した運動方程式として ζ：抵抗係数、m：質量、$f(t)$：揺動力（熱運動）、$F(t)$：外力で表されるランジュバン方程式がよく用いられる。揺動力は簡単のために，下記の性質を持つとする。

$$\langle f(t)\rangle = 0, \qquad \langle f(t)f(t')\rangle = 2A\delta(t-t') \tag{26}$$

広義のランジュバン方程式は，慣性，外力を考慮するかどうかによって下記の４種類に分類される。

慣性・力	自由	外力
無し	拡散方程式	拡散方程式（外力有り）
有り	Langevin 方程式	Focker-Planck 方程式

表 1: 方程式のタイプ

- 慣性を無視、自由 ($m = 0, F(t) = 0$)
  方程式：
  $$\zeta\frac{dx}{dt} = f(t) \tag{27}$$
  期待値：
  $$\langle \Delta x\rangle = 0, \quad \left\langle \Delta x^2\right\rangle = \frac{2A}{\zeta^2}\Delta t \tag{28}$$
  分布関数 W：
  $$\frac{\partial W}{\partial t} = D\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{29}$$

2002/04/17

- 慣性を無視、外力 ($m = 0, F(t) \neq 0$)
  方程式：
  $$\zeta\frac{dx}{dt} = F(t) + f(t) \tag{30}$$
  期待値：
  $$\langle \Delta x\rangle = \frac{F}{\zeta}\Delta t, \quad \left\langle \Delta x^2\right\rangle = \frac{2A}{\zeta^2}\Delta t \tag{31}$$
  分布関数 W：
  $$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial W}{\partial x} - \beta F(x)W\right) \tag{32}$$
- 慣性有り自由 ($m \neq 0, F(t) = 0$)（Langevin 方程式）
  方程式：
  $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\zeta\frac{dx}{dt} + f(t) \tag{33}$$
  $< x^2 >$、$< v > = < dx/dt >$ の方程式とエネルギー等分配則
  $$\frac{d^2}{dt^2}\frac{< x^2 >}{2} + \zeta\frac{d}{dt}\frac{< x^2 >}{2} = \langle v^2\rangle = \frac{A}{\zeta} = kT \tag{34}$$

期待値：

$$< v >= 0, \quad < x^2 >= \frac{2A}{\zeta^2}t = \frac{2kT}{\zeta}t \tag{35}$$

v の分布関数 w：

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial v}(\zeta v w) \tag{36}$$

これは、$w \propto \exp(-\zeta v^2/2A)$ の定常解を持つ。

$t \gg \zeta^{-1}$ での分布関数 w、W

$$w \propto \exp(-v^2/2kT), \quad W \propto \exp(-(x-x_0)^2/4Dt) \tag{37}$$

- 慣性を有り、外力 $(m \neq 0, F(t) \neq 0)$
  方程式：

$$\frac{dv}{dt} = -\zeta v + F(x) + f(t) \tag{38}$$

期待値：

$$< \Delta x >= v\Delta t, < \Delta v >= (-\zeta v + F)\Delta t, < \Delta x^2 >\sim 0$$
$$< \Delta v \Delta x >= 0, \quad < \Delta v^2 >= 2A\Delta t \tag{39}$$

v の分布関数 w（Focker-Planck 方程式）：

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -v\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}(\zeta v - F)w + A\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \tag{40}$$

2.6 揺動散逸定理

Langevin 方程式において

$$< v(t)v(t') >= \frac{A}{\zeta}e^{-\zeta|t-t'|}, < v(t)^2 >= kT \tag{41}$$

$$< v(t)v(0) >= \frac{kT}{\zeta}, \quad < f(t)f(0) >= 2\zeta kT\delta(t) \tag{42}$$

積分で表現すると

$$\beta = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{kT}\int_0^\infty dt < v(t)v(0) > \tag{43}$$

$$\zeta = \frac{1}{kT}\int_0^\infty dt < f(t)f(0) > \tag{44}$$

- 電場と電流の場合

  電子の運動方程式と平均電流

$$m\frac{d}{dt} < v >= -m\zeta < v > +eE, \quad J = ne < v >_0 \tag{45}$$

ただし、$< v >_0 = eE/m\zeta$、また、$\sigma = J/E = ne^2/m\zeta$。揺動電流 $j(t) = \sum_i^n ev_i$ の方程式は

$$\frac{d}{dt}j(t) = -\zeta j(t) + \frac{e^2}{m}\sum_{i=1}^n \epsilon_i(t) \tag{46}$$

ただし、$\frac{e^4}{m^2} < \epsilon_i(t)\epsilon_l(t') >= 2A\delta_{il}\delta(t-t')$。この場合の揺動散逸定理は、

$$\sigma = \frac{1}{kT}\int_0^\infty dt < j(t)j(0) > \tag{47}$$

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{kT}\int_0^\infty dt < \epsilon(t)\epsilon(0) > \tag{48}$$

2.7 応用例

- 株式市場における価格変動

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t)$$

は確率方程式

$$\Delta P(t+\Delta t) = b(t)\Delta P(t) + f(t) \tag{49}$$

に従うと考えてよい。ただし、$f(t)$ は平均 0 の揺動、$b(t)$ は非負の揺動。この式から Langevin 方程式

$$\frac{d}{dt}\Delta P(t) = -\nu\Delta P(t) + F(t)$$

となる。ただし、$\nu = (1-b(t))/\Delta t$、$F(t) = f(t)/\Delta t$。$b(t) > 1$ の時、ΔP は不安定になる。式 49 の二乗平均は、

$$\left\langle \Delta P(t+\Delta t)^2 \right\rangle = \left\langle b(t)^2 \right\rangle \left\langle \Delta P(t)^2 \right\rangle + \left\langle f(t)^2 \right\rangle$$

となり、定常状態で、

$$\left\langle \Delta P(t)^2 \right\rangle = \frac{\left\langle f(t)^2 \right\rangle}{1 - \langle b(t)^2 \rangle}$$

熱平衡状態では、左辺は温度に相当し、上式は揺動散逸定理となる。$b(t)$ の分布に依存し、ΔP は多様な振る舞いをしめす。

2001/04/18

- 重力波検出用の鏡の振動
  鏡を弾性体と考えると運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = F(t) \tag{50}$$

Fourier 変換すると

$$-m\omega^2\tilde{x} + m\omega_0^2(1+i\phi)\tilde{x} = \tilde{F} \tag{51}$$

ただし、ϕ は損失角。このシステムの易動度は、

$$\beta = \frac{\tilde{F}}{\omega\tilde{x}} \propto \frac{\omega}{m}\frac{\omega_0^2\phi}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \omega_0^4\phi^2} \tag{52}$$

揺動散逸定理を用いると

$$\tilde{x}^2 = v^2/\omega^2 \propto \frac{kT}{m\omega}\frac{\omega_0^2\phi}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \omega_0^4\phi^2} \tag{53}$$

となり、ϕ が小さくて損失が少ないほど、$\omega \neq \omega_0$ での鏡の変動が小さい。ただし、$\omega \sim \omega_0$ での共振のピークは大きくなる。

3　流体の基礎方程式

3.1　連続の式

（質量の保存）

$$\frac{\partial\rho}{\nabla t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0 \tag{54}$$

ただし、ρ は質量密度。非圧縮流体の場合 $\rho=const.$ なので、連続の式は

$$\nabla\cdot\vec{v}=0 \tag{55}$$

3.2　実質微分（物質微分）

substantial (material) derivative

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla \tag{56}$$

3.3　運動方程式

（運動量の保存）

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v})=\text{体積に作用する力}+\text{面に作用する力} \tag{57}$$

- 表面からの運動量の流出

$$\nabla\cdot\rho\vec{v}\vec{v}dV=\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dS \tag{58}$$

連続の式を用いて書き換えると

$$\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}-\vec{v}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{59}$$

- 体積に作用する力
  例えば、重力 $\rho\vec{g}dV$

- 表面に作用する力
  応力テンソル σ_{xy}:y 軸に垂直な面を通して、x 方向にはたらく力。

$$\sigma_{xy}=-\mu\frac{dv_x}{dy} \tag{60}$$

$$\overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec{n}dS=\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma} \tag{61}$$

これらをあわせると運動方程式は

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt}=\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\sigma}+\rho\vec{g} \tag{62}$$

3.4　Navier-Stokes 方程式

ニュートン流体・非圧縮流体の方程式

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\sigma}&=-p\overleftrightarrow{I}-\overleftrightarrow{\tau}\\ \sigma_{ij}&=-p\delta_{ij}-\tau_{ij}\end{aligned} \tag{63}$$

ここで、ひずみ応力 $\overleftrightarrow{\tau}$ が $i\leftrightarrow j$ に対し、対称となるように

$$\tau_{ij}=-\mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{64}$$

ととる。ただし、μ は粘性率。この時

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\tau}=-\mu\nabla^2\vec{v} \tag{65}$$

となり、Navier-Stokes 方程式

$$\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{v}+\vec{g} \tag{66}$$

が得られる。ただし、$\nu=\mu/\rho$ は動粘性率。

2001/04/25

3.5　渦度方程式

N-S Eq. $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{v}-\nabla\phi$ （ただし、$\vec{g}=-\nabla\phi$）に対して、渦度 $\vec{\omega}$ は

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{\omega}\times\vec{v}=-\nabla\left(\frac{v^2}{2}+P+\phi\right)-\nu(\nabla\times\vec{\omega}) \tag{67}$$

となる。ただし、$\nabla p/\rho=\nabla P$ とかけるとする。渦度の時間発展（渦度方程式）は

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega}=(\omega\cdot\nabla)\vec{v}+\nu\nabla^2\vec{\omega} \tag{68}$$

となる。

3.6　Bernoulli の定理

渦度方程式で $\frac{\partial}{\partial t}=0,\ \vec{g}=-\nabla\phi,\ \nu=0$（完全流体）とすると

$$\vec{v}\times\vec{\omega}=\nabla\left(\frac{v^2}{2}+\mathrm{P}+\phi\right) \tag{69}$$

従って、流れに沿って

$$\frac{v^2}{2}+\mathrm{P}+\phi=const. \tag{70}$$

3.7　渦の不成不滅の定理

（角運動量の保存）$\nu=0$ の時、流体と共に運動する渦は $\int\omega dS=const.$

3.8 Reynolds の相似則

N-S Eq. を U, L を用いて無次元化する。

$$\vec{v} = U\vec{v}',\ x = Lx',\ y = Ly',\ z = Lz',$$

$$t = (L/U)t',\ P = \rho U^2 P'$$

N-S Eq. は

$$\frac{D\vec{v}'}{Dt'} = -\nabla' P' + \frac{\nu}{UL}\nabla'^2\vec{v}' \tag{71}$$

従って、$R = UL/\nu$:Reynolds number が同じで、幾何学的に相似な境界条件では、相似な流れができる。

2001/05/02

3.9 運動エネルギーの方程式

単位質量あたりの運動エネルギーは $v^2/2$。この時間発展は

$$\rho\frac{D}{Dt}\frac{v^2}{2} = \rho\vec{v}\cdot\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{v}\cdot(-\nabla p - \nabla\cdot\overleftrightarrow{\tau} + \rho\vec{g}) \tag{72}$$

連続の式 (54) を用いて書き換えると

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} &= -\nabla\cdot\left(\frac{\rho v^2\vec{v}}{2}\right) - \nabla\cdot(p\vec{v}) + p(\nabla\cdot\vec{v})\\ &- \nabla\cdot(\overleftrightarrow{\tau}\cdot\vec{v}) + \overleftrightarrow{\tau}\nabla\vec{v} + \rho\vec{v}\cdot\vec{g}\end{aligned} \tag{73}$$

となる。この式の左辺は運動エネルギーの増加を表し、右辺は

1. 対流による運動エネルギーの損失、
2. 周囲の圧力によってされた仕事、
3. 膨張・圧縮による内部エネルギーへの変換、
4. 周囲から粘性によってされた仕事、
5. 内部エネルギーへの不可逆変換、
6. 外力によってされた仕事をあらわす。

このうち (5) はニュートン流体の場合に

$$\overleftrightarrow{\tau}\nabla\vec{v} = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 \ < \ 0 \tag{74}$$

となり、必ず負になる。

3.10 内部エネルギーの方程式

単位質量あたりの内部エネルギーを U とする。ある閉曲面（あるいは体積要素 dV）を考えるとその表面を通るエネルギーは

- 対流によるエネルギーの流失 $-\nabla\cdot\big((\rho U + \rho v^2/2)\vec{v}\big)$
- 熱伝導による熱流束を $\vec{q}$ として $-\nabla\cdot\vec{q}$
- 圧力によってされる仕事 $-\nabla\cdot(p\vec{v})$
- 粘性によってされる仕事 $-\nabla\cdot(\overleftrightarrow{\tau}\cdot\vec{v})$
- 外力によってされる仕事 $\rho\vec{g}\cdot\vec{v}$

となる。これらを運動エネルギーの式 (73) と併せて、内部エネルギーの式を導くと

$$\rho\frac{D}{Dt}U = -\nabla\cdot\vec{q} - p(\nabla\cdot v) - \overleftrightarrow{\tau}\nabla\vec{v} \tag{75}$$

となる。

3.11 Boltzmann 方程式からの導出

流体の構成粒子の分布関数を考えて、ミクロな描像から流体の基礎方程式を導く。このとき、粒子の生成消滅、粒子間相互作用を表す項 $\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c$ をいれる。この場合内部エネルギーは粒子の相対運動で表される。

粒子の分布関数 $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ を考える。粒子間の衝突がないとき、Liouville の定理より $\frac{df}{dt} = 0$、衝突があると

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)f + \left(\frac{\vec{F}}{m}\cdot\nabla_v\right)f = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c \tag{76}$$

これを Boltzmann 方程式と呼ぶ。密度 n は

$$n \equiv \int f d\vec{v} \tag{77}$$

と表される。このとき、ある量 g の平均 $< g >$ は

$$< g > \equiv \frac{\int fgd\vec{v}}{\int fd\vec{v}} \tag{78}$$

で定義される。f, n, g の性質、定義から

$$\begin{aligned}\int g\frac{\partial f}{\partial t}d\vec{v} &= \frac{\partial}{\partial t}n < g > -n\left\langle\frac{\partial}{\partial t}g\right\rangle\\ \int gv_i\frac{\partial f}{\partial x_i}d\vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x_i}n < v_i g > -n\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}v_i g\right\rangle\\ \int g\frac{F_i}{m}\frac{\partial f}{\partial v_i}d\vec{v} &= -\frac{n}{m}\left\langle\frac{\partial}{\partial v_i}gF_i\right\rangle\end{aligned} \tag{79}$$

となる。これを用いて Boltzmann 方程式を書き直すと

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(n < g >) - n\left\langle\frac{\partial g}{\partial t}\right\rangle + \nabla\cdot(n < g\vec{v} >)\\ &- \ n < \nabla\cdot(g\vec{v}) > -\frac{n}{m}\vec{F}\cdot\nabla_v g = \int g\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c d\vec{v}\end{aligned} \tag{80}$$

この式で $g = 1$ とおくと連続の式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot n < \vec{v} > = \int\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c d\vec{v} \tag{81}$$

が得られる。

式 (80) で $g = m\vec{v}$ とおくと運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} mn < \vec{v} > + \frac{\partial}{\partial x_j} mn < v_j \vec{v} > - n < \vec{F} > = \int m\vec{v} \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c d\vec{v} \tag{82}$$

が得られる。ここで、$\vec{v} = < \vec{v} > + \vec{v}_r$ として相対運動（熱運動）を分離すると

$$mn \frac{D}{Dt} < \vec{v} > = n < \vec{F} > - \nabla P - \nabla \cdot \overleftarrow{\tau} + \vec{R} \tag{83}$$

ただし、$P = nm < v_r^2 > /3$ は応力テンソルの等方成分（圧力）を表し、$\tau_{ij} = nm < v_{ri} v_{rj} - < v_r^2 > \delta_{ij}/3 >$ は非等方な成分を表す。また、$\vec{R} = \int m\vec{v}_r \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c d\vec{v}$ は粒子の衝突、生成、消滅による運動量生成を表す。

式 (80) で $g = m\vec{v}/2$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{nm}{2} < v^2 >\right) + \nabla \cdot \frac{nm}{2} < v^2 \vec{v} > - n \left\langle \vec{F} \cdot \nabla_v \frac{v^2}{2} \right\rangle = \int \frac{mv^2}{2} \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c d\vec{v} \tag{84}$$

となる。ここで、$\vec{v} = < \vec{v} > + \vec{v}_r$ として平均流を分離すると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{nm}{2} < v >^2 + \frac{3}{2} p\right) \\ &\quad + \nabla \cdot \left(\left(\frac{nm}{2} < v >^2 + \frac{5}{2} p\right) < \vec{v} > + \tau < \vec{v} > + \vec{q}\right) \\ &= n\vec{F} \cdot < \vec{v} > + \vec{R} \cdot < \vec{v} > + \vec{Q} \\ &\quad + \frac{m}{2} < v >^2 \int \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c d\vec{v} \end{aligned} \tag{85}$$

となる。ただし、$\vec{q} = \frac{nm}{2} < v_r^2 \vec{v}_r >$ は random motion によるエネルギー束、$\vec{Q} = \int \frac{m}{2} v_r^2 \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c d\vec{v}$ は衝突による熱の発生を表す。一方、平均流のエネルギーは式 (81), (83) から

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{nm}{2} < v >^2\right) \\ &= \frac{m}{2} < v >^2 \left(\nabla \cdot (n < \vec{v} >) + \int \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c d\vec{v}\right) \\ &\quad - mn < \vec{v} > \cdot (< \vec{v} > \cdot \nabla) < \vec{v} > + n < \vec{F} > \cdot < \vec{v} > \\ &\quad - < \vec{v} > \cdot \nabla p - < \vec{v} > \nabla \overleftarrow{\tau} + \vec{R} \cdot < \vec{v} > \end{aligned} \tag{86}$$

となる。これは流体の式 (73) と一致する。全エネルギー（式 (85)）から平均流の運動エネルギー（式 (86)）の式を差し引くと内部エネルギーの式

$$\frac{3}{2}\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{3}{2} p < \vec{v} > + p \nabla \cdot < \vec{v} > + \overleftarrow{\tau} \cdot \nabla < \vec{v} > + \nabla \cdot \vec{q} = \vec{Q} \tag{87}$$

$$\frac{3}{2} n \frac{DT}{Dt} + p \nabla \cdot < \vec{v} > = - \nabla \cdot \vec{q} - \overleftarrow{\tau} \cdot \nabla < \vec{v} > + \vec{Q} \tag{88}$$

が得られる。

2001/05/16

4 Reynolds 応力

4.1 Reynolds 分解と Reynolds 応力

Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \overleftarrow{\tau}$$

を平均流と乱れた流れに分解

$$\begin{aligned} &\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \quad \left(\vec{V} = \bar{\vec{v}}\right) \\ &p = P + p' \\ &\overleftarrow{\tau} = \overleftarrow{T} + \overleftarrow{\tau}' \\ &\left(T_{ij} = -\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) \quad , \tau'_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i}\right)\right) \end{aligned}$$

することを Reynolds 分解と言う。Navier-Stokes 方程式の時間平均は、

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} + \overline{\vec{v}' \cdot \nabla \vec{v}'} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overleftarrow{T} \tag{89}$$

ここで左辺第 2 項は $\nabla \cdot \vec{v}' = 0$ より $\overline{\nabla \cdot \vec{v}' \vec{v}'}$ となる。式 (89) は

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left(-P - \overleftarrow{T} + \rho \overline{\vec{v}' \vec{v}'}\right) \tag{90}$$

$\rho \overline{\vec{v}' \vec{v}'}$ を Reynolds 応力と呼ぶ。Boltzmann 方程式での応力テンソル $P_{ij} = nm < v_{ri} v_{rj} >$ との類似性に注意。

4.2 Reynolds 応力の大きさ

平均流の粘性応力は

$$\tau_{12} \sim \mu \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \sim \mu \frac{U}{L} \tag{91}$$

一方、Reynolds 応力は

$$\rho \overline{v'_1 v'_2} \sim \rho (v')^2 \tag{92}$$

これらの比は

$$\frac{\rho \overline{v'_1 v'_2}}{\tau_{12}} \sim R \left(\frac{v'}{U}\right)^2 \tag{93}$$

となり、Reynolds 数が大きいときには、Reynolds 応力は大きくなる。

4.3 Prandtl の混合長仮説

剪断流における分子粘性と乱流粘性の類似性を考える。

- 分子粘性
  $\frac{\partial V_1}{\partial x_1}$ があるとき、平均自由行程を ξ とし、$x_2 = -\xi$ にあった粒子が v_{th} の熱速度で $x_2 = 0$ まで移動し、

その場の粒子と衝突するとする。この時、渡される運動量の平均は $< mV_1(-\xi) - mV_1(0) >$。生じる応力は

$$\frac{\rho}{m} < mV_1(-\xi) - mV_1(0) > v_{th} \\ \sim \rho \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \xi v_{th} = \mu \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \quad (94)$$

従って、粘性率は $\mu = \rho \xi v_{th}$ となる。

- 乱流粘性
  分子の替わりに流体のかたまりを考えると、やり取りされる運動量は

$$\begin{aligned} \rho v(-l) &- \rho v(0) \\ &= \rho V_1(-l) - \rho V_1(0) + \rho v_1'(-l) - \rho v_1'(0) \\ &\sim \rho \frac{\partial V_1}{\partial x_2} l \end{aligned} \quad (95)$$

ただし、l は Prandtl の混合長。応力は $\rho \frac{\partial V_1}{\partial x_2} l v_2'$。一方、Reynolds 応力は $\rho \overline{v' v'}$ であるので、上記は $\frac{\partial V_1}{\partial x_2} \leftrightarrow v_1'$ と対応させたことに相当する。ここで、$v_1' \sim v_2'$ とすると、応力は

$$\rho l^2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \left| \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right| \quad (96)$$

乱流の粘性係数、分子粘性率は

$$\rho l^2 \left| \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right| \sim \rho l v_1' \ , \quad \mu = \rho v_{th} \xi \quad (97)$$

これらの比は

$$\frac{\rho l v'}{\mu} = \frac{l v'}{\nu} \quad (98)$$

となり、乱流の Reynolds 数を表す。

4.3.1 拡散係数の評価

混合長の応用例（その１）
拡散係数の評価（プラズマでの場合）
平均流が $\nabla \cdot (\bar{n}\bar{\vec{v}}) = 0, \bar{\vec{v}} = 0$ を満たし、摂動（揺動）$n', \vec{v}'$ が存在する場合を考える。この時連続の式 $\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0$ の１次の項を整理すると

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \nabla \bar{n} = 0 \quad (99)$$

となる。さらに揺動がある成長率 γ で成長し、

$$n' \propto e^{\gamma t} \quad (100)$$

で表されるとすると、

$$\gamma n' + v' \frac{\bar{n}}{L_n} = 0 \ \rightarrow \ v' = \frac{n'}{\bar{n}} L_n \gamma \quad (101)$$

となる。ただし、L_n は密度の勾配のスケール長。混合長 l(=揺動の波長) を導入し、

$$n' = n \frac{l}{L_n} \quad (102)$$

とする。揺動による粒子輸送（、拡散）は

$$\Gamma = < n' \vec{v}' > \equiv D \nabla n = D \frac{n}{L_n} \quad (103)$$

に式 (101,102) を代入すると拡散係数が

$$D = l^2 \gamma = \frac{\gamma}{k^2} \quad (104)$$

となる。ただし、k は揺動の波数。この式と式 (11) との対応に注意。この考え方では、ある波長の揺動による密度の摂動は、その波長程度の領域に渡って、密度勾配を無くす程度まで大きくなると考えている。従って、この評価による拡散係数は上限を与えると考えられる。また、実際に適用するときに成長率をどのように与えるかが必ずしも明確でない。

4.4 Hagen Poiseuille 流と経験則

層流での解析解を求めて、乱流による粘性の増加の経験則を比較する。

定常状態で十分長い円形パイプに圧力をかけて流体が流れている場合を考える。この時、N-S Eq. の z 成分（パイプに沿う成分）を円筒座標で表すと

$$\nu \nabla^2 \vec{v} - \frac{\nabla p}{\rho} = 0 \rightarrow \nu \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} \right) v_z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = 0 \quad (105)$$

となる。これを満たす解は

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\rho\nu}\frac{dp}{dz}(a^2 - r^2) \quad (106)$$

この解は層流を表し、Hagen Poiseuille 流と呼ぶ。平均流速 V は

$$V = \frac{\int_0^a 2\pi r v_z dr}{\pi a^2} = \frac{a^2}{8\rho\nu}\frac{dp}{dz} \quad (107)$$

となる。無次元量である管摩擦係数 λ を

$$\frac{dp}{dz} = \lambda \frac{1}{2a} \frac{\rho V^2}{2} \quad (108)$$

で定義すると

$$\lambda = \frac{64}{R} \quad (109)$$

ただし、$R = V2a/\nu$ は Reynolds 数。Reynoolds 数が大きくなるにつれて、粘性の影響が相対的に小さくなり、摩擦係数は減少する。

$R <\sim 2300$ では層流として流れるが、$R >\sim 2300$ では、乱流となり、管摩擦係数は

$$\lambda = 0.3164 R^{-1/4} \quad (110)$$

という経験則で表される。層流に比べて、乱流では、摩擦が大きくなり、同じ平均流速を得るためには、乱流の方が層流よりもより大きな圧力勾配を必要とする。

2001/05/23

5 一様等方乱流

一様等方乱流は，古くから研究され，種々の手法が開発された。ここでは，古典的な考え方である kolmogorov の $-5/3$ 乗則を紹介する。

5.1 乱流のエネルギースペクトル

通常，乱流は大きなスケールで駆動され，そこからより小さな渦が生成され，粘性により減衰する。これをエネルギースペクトルで考えると，低波数でエネルギーを注入され，そのエネルギーはより高い波数へ輸送される。十分高い波数では，乱流のエネルギーは粘性により散逸する。そこで，Kolmogorov は，エネルギー注入の波数と粘性散逸の波数の間に，慣性領域と呼ばれる領域があり，その領域で，系を特徴付けるのは，単位質量のエネルギーの流れ ϵ

$$\epsilon \sim \frac{d}{dt}\frac{v^2}{2} \sim v^2\left(\frac{v}{L}\right) \sim \frac{v^3}{L} \tag{111}$$

と波数 k だけであると考えた。ただし，L は乱流のスケール長を表す。このような仮定により，乱流のスペクトルが，求められる。

粘性による散逸は

$$-\frac{1}{\rho}\overleftarrow{\tau}\nabla\vec{v} \sim \frac{\mu}{\rho}(\nabla\vec{v})^2 \sim \nu\left(\frac{v^2}{l^2}\right) \tag{112}$$

これは，l に対して，$\propto l^{-2}$ と依存するのに対して，波数空間での流れは $\epsilon \propto l^{-1}$ となる。すなわち，大きなスケール（慣性領域）では，エネルギーは高い波数の方へ流れていくが，小さなスケールでは，エネルギーは熱に散逸していくと予想される。逆に，粘性散逸と ϵ が同程度となるスケール L_K を考えると

$$\epsilon \sim \frac{V_K^3}{L_K} \sim \nu\left(\frac{V_K^2}{l^2}\right) \tag{113}$$

となる。系の独立変数が ϵ, ν であるとして次元解析から，長さ，時間，速さのスケールを求めると，

$$\begin{aligned} L_K &= \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \\ T_K &= \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2} \\ V_K &= (\nu\epsilon)^{1/4} \end{aligned} \tag{114}$$

このスケールを Kolmogorov のスケールと呼ぶ。従って，乱流では，低波数に注入されたエネルギーが慣性領域を通って高い波数へ流れ，Kolmogorov のスケールまで小さくなると粘性によって散逸する。

5.2 次元解析による Kolmogorov 則

次元解析により慣性領域のエネルギースペクトル $E(k)$ を求める。

$$\int E(k)dk = \frac{v^2}{2} \tag{115}$$

$$\rightarrow [E(k)] = \frac{L^3}{T^2} \tag{116}$$

また，

$$[\epsilon] = \frac{L^2}{T^3} \tag{117}$$

この領域の独立変数は ϵ, k のみであるとし，

$$E(k) \propto k^\alpha \epsilon^\beta$$

の形を考える。次元を比較すると

$$\begin{aligned} &\frac{L^3}{T^2} = [E(k)] = L^{-\alpha}\left(\frac{L^2}{T^3}\right)^\beta \\ &3 = 2\beta - \alpha, \quad 2 = 3\beta \\ &\alpha = -\frac{5}{3}, \quad \beta = \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{118}$$

すなわち，$E(k) \propto \epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ となる。これを Kolomogorov の $-5/3$ 乗則と言う。

このとき，粘性への散逸は

$$\nu\frac{v^2}{l^2} \sim \nu v^2 k^2 \sim \nu E(k)\Delta k \sim \nu k^{-5/3}k^2\Delta k \sim \nu k^{1/3}\Delta k \tag{119}$$

となり，k が大きい方が散逸が大きくなる。

Kolomogorov の $-5/3$ 乗則は風洞実験において，よく合うことが確かめられている。

5.3 MHD 乱流の場合

Magnetohydrodynamic(MHD) 流体では，通常の力以外に電磁力が重要な役を持つ。エネルギーは，運動エネルギー，内部エネルギーの他に磁場エネルギーとして存在する。十分に乱流が発達し，各波数領域で運動エネルギー v^2 が磁場エネルギー b^2 と平衡状態にあり，それぞれのエネルギースペクトル $E(k)$, $F(k)$ は同じ形を持つと仮定する。MHD 流体での相互作用はアルフベン速度 $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho}}$ で伝わる。相互作用の時間を T とすると，

$$[\epsilon] = \frac{[v^3]}{[L]} = \frac{[v^3]}{B_0 T} = \frac{L^3}{T^4}\frac{1}{B_0} \tag{120}$$

前節と同様に $E(k) \propto k^\alpha \epsilon^\beta$ の形を考え，次元を比較すると

$$\begin{aligned} \frac{L^3}{T^2} &= [E(k)] = L^{-\alpha}\left(\frac{L^3}{T^4}\frac{1}{B_0}\right)^\beta \\ 3 &= 3\beta - \alpha, \quad 2 = 4\beta \\ \alpha &= -\frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{121}$$

すなわち，$E(k) \propto (\epsilon B_0)^{1/2} k^{-3/2}$ となる。これは，Kraichnann によって導かれた。このように，次元解析は強力な道具であるが，仮定が正しいかどうか吟味する必要がある。

6 カルマン・ハワース方程式

一様等方乱流を理論的に取り扱った Karman-Howarth 方程式について解説する。

6.1 高次モーメントと乱流の打ち止め問題

ここでは，記号をもちいて，高次モーメントと乱流の打ち止め問題を直感的に説明する。Reynolds 分解は２次まで，Karmann-Howarth 方程式は３次までを扱う。

N-S Eq. を速度の１次と２次に分けて整理すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right) u_i = -u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} \tag{122}$$

となるこれを OperatorL_0，M，L_1 を用いて記号的に表すと

$$L_0 \vec{u} = M \cdot \vec{u}\vec{u} + L_1 p \tag{123}$$

統計平均（あるいは時間平均）量を考えると

$$L_0 < \vec{u} >= M \cdot < \vec{u}\vec{u} > + L_1 < p > \tag{124}$$

これは $\vec{u}$ の１次のモーメントと２次のモーメントを関係づける式になっている。Reynolds 応力は，右辺の２次の項（の変動成分による分）に対応する。Prandtl の混合長は，混合長を用いて，$< \vec{u}\vec{u} >$ を $< \vec{u} >$ の空間微分で表現する。このようにすると，式 (124) は閉じて，方程式を解くことが出来るようになる。同様にして２次，３次のモーメントを考えることができる。

$$L_0 < \vec{u}\vec{u} >= M \cdot < \vec{u}\vec{u}\vec{u} > + L_1 < p\vec{u} > \tag{125}$$

$$L_0 < \vec{u}\vec{u}\vec{u} >= M \cdot < \vec{u}\vec{u}\vec{u}\vec{u} > + L_1 < p\vec{u}\vec{u} > \tag{126}$$

Karman-Howarth 方程式は，式 (125) に対応し，３次のモーメントと２次のモーメントの関係式である。

このように，非線形項があるため，低次のモーメントはより高次のモーメントで表され，このままでは方程式は閉じない。そこで，何らかの仮定を導入し，モーメントの次数を有限に抑える必要がある。これを乱流の打ち止め問題と呼ぶ。

6.2 ２点２重相関と２点３重相関

Karman-Howarth 方程式は一様等方乱流の２点２重相関と２点３重相関の関係式を与える。２点 A, B の相関は例えば,

$$\begin{aligned} < \vec{u}_A p_B >: &\quad \text{１重相関（１階のテンソル）} \\ < \vec{u}_A \vec{u}_B >: &\quad \text{２重相関（２階のテンソル）} \\ < \vec{u}_A \vec{u}_A \vec{u}_B >: &\quad \text{３重相関（３階のテンソル）} \end{aligned} \tag{127}$$

一様等方な場合の一般形は

$$\begin{aligned} \text{１階のテンソル：} &\quad B_i(r) = A_0(r) r_i \\ \text{２階のテンソル：} &\quad B_{ij}(r) = A_1(r) r_i r_j + B_1(r)\delta_{ij} \\ \text{３階のテンソル：} &\quad B_{ijk}(r) = A_2(r) r_i r_j r_k + B_2(r) r_k \delta_{ij} \\ &\qquad + C_2(r) r_j \delta_{ik} + D_2(r) r_i \delta_{jk} \end{aligned} \tag{128}$$

2001/05/30

- ２重相関 Q_{ij} の性質
  $Q_{ij} = \overline{u_{iA} u_{jB}}$ として,
  - AB を入れ替えても変わらない
    $Q_{ij}(\vec{r}) = Q_{ji}(-\vec{r})$
    A_1,B_1 は偶関数。
  - $\vec{r} = (r, 0, 0)$ となるように座標を取ることができる
    Q_{ij} のうち独立なものは,
    $Q_{ll} = \overline{u_{lA} u_{lB}}$（縦相関）
    $Q_{nn} = \overline{u_{nA} u_{nB}}$（横相関)）

  従って

$$Q_{ij} = \frac{r_i r_j}{r^2}(Q_{ll} - Q_{nn}) + Q_{nn}\delta_{ij} \tag{129}$$

- ３重相関 $S_{ij,k}$ の性質
  $S_{ij,k} = \overline{u_{iA} u_{jA} u_{kB}}$ として,
  - $\vec{r} = (r, 0, 0)$ となるように座標を取ることができる
    $S_{ij,k} = S_{ji,k}$
    $C_2 = D_2$
  - S のうち独立なものは,
    $S_{11,1} = Q_{lll}$
    $S_{22,1} = S_{33,1} = Q_{nnl}$
    $S_{12,2} = S_{13,3} = Q_{lnn}$

  従って

$$\begin{aligned} S_{ij,k} &= \frac{r_i r_j r_k}{r^3}(Q_{lll} - Q_{nnl} - 2Q_{lnn}) \\ &\quad + \frac{r_k \delta_{ij}}{r} Q_{nnl} + \frac{r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ik}}{r} Q_{lnn} \end{aligned} \tag{130}$$

また，原点に関する反転から

$$S_{ij,k} = -S_{k.ij} \tag{131}$$

6.3 Karman-Howarth 方程式

２重相関と３重相関の関係式（K-H Eq.）を導く。

6.3.1 Navier-Stockes 方程式と相関

２点での N-S Eq. を用いて相関の式を導出する。A 点，B 点での N-S Eq.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\nabla^2 u_i \\ \frac{\partial u'_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'_k}(u'_j u'_k) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \nu\nabla'^2 u'_j \end{aligned} \tag{132}$$

２つ式のそれぞれに u'_j, u_i をかけて平均をとると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\nu\nabla_r^2\right) Q_{ij} &= \frac{\partial}{\partial r_k}(S_{ik,j} - S_{i,jk}) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_k}(S_{ik,j} + S_{jk,i}) \equiv T_{ij} \end{aligned} \tag{133}$$

（ここで非圧縮性からくる $\overline{pu'_j} = \overline{p'u_i} = 0$ を用いた。）

6.3.2 非圧縮性による式変形

- $\frac{\partial}{\partial r_i} Q_{ij} = 0$
  $Q_{nn} = Q_{ll} + \frac{r}{2}Q'_{ll} = \frac{1}{2r}\left(r^2 Q_{ll}\right)'$
  ただし $'$ は r 微分をあらわす。

$$Q_{ii} = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right) Q_{ll} \tag{134}$$

- $\frac{\partial}{\partial r_i} S_{ik,j} = 0$
  $Q_{nnl} = -\frac{1}{2}Q_{lll}$
  $Q_{lnn} = \frac{1}{4r}(r^2 Q_{lll})'$

$$S_{ik.i} = \frac{r_k}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right) Q_{lll} \tag{135}$$

6.3.3 Karman-Howarth 方程式

式 (134) より，$i = j$ の時の式 (133) の左辺は

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right)\frac{\partial}{\partial t}Q_{ll} - 2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right) Q_{ll}$$

一方，右辺は式 (135) より

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 3\right)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right) Q_{lll}$$

従って，

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - 2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right] Q_{ll} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right) Q_{lll} \tag{136}$$

これを Karman-Howarth 方程式と言う。N-S Eq. と対応させせると

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i - \nu\nabla^2 u_i = -\frac{\partial}{\partial x_k}(u_i u_k) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{137}$$

左辺は第２項は，粘性項で $\overline{u_{Al}u_{Bl}} = Q_{ll}$ に作用する。右辺第１項は，慣性項，対流項，非線形項と呼ばれ，$\overline{u_{Al}u_{Al}u_{Bl}} = Q_{lll}$ に作用する。圧力項は現れない。

6.3.4 波数表現

２重相関の波数 $\vec{k}$ を用いて

$$Q_{ij}(\vec{r}) = \overline{u_{iA}u_{jB}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ij}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k \tag{138}$$

同様に３重相関 $S_{ij,k}$ の波数表現を $\Phi_{ij,k}$ とする。式 (133) の波数表現は

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{ij} = ik_\alpha\left(\Phi_{i\alpha,j} + \Phi_{j\alpha,i}\right) - 2\nu k^2 \Phi_{ij} \tag{139}$$

エネルギースペクトルは

$$\frac{\partial}{\partial t}E(k,t) = 4\pi k^6 \Gamma(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t) \tag{140}$$

ただし，$\int_0^\infty E(k,t)dk = \overline{u_i^2}/2$，$\Gamma(k,t)$ は $\Phi_{i\alpha,j}$ の一部。

<u>2001/06/06</u>

6.4 いろいろなスケール

6.4.1 粘性の効くスケール

渦の粘性による減衰時間を評価すると小さな渦ほど寿命が短いことがわかる。渦の大きさを l_e，速さを v_e とすると，
渦の持つエネルギーは　$mv_e^2/2 \sim \rho l_e^3 v_e^2/2$
粘性力は　　応力 × 面積　$\sim \mu\frac{\partial v}{\partial y}l_e^2 \sim \mu l_e v_e$
粘性による仕事は 力 × 距離 = 力 × 速度 × 寿命　$\sim \mu l_e v_e^2 t$
従って，渦の寿命 t は

$$t \sim \frac{\rho l_e^3 v_e^2}{\mu l_e v_e^2} \sim \frac{\rho l_e^2}{\mu} \sim \frac{l_e^2}{\nu} \tag{141}$$

6.4.2 Reynolds 応力のきく大渦

Reynolds 応力は $\overline{\rho u_i u_j}$。渦の大きさを l_E，速さを v_E とすると，Reynolds 応力による力は $\rho v_E^2 l_E^2$。これによる単位時間あたりの仕事は　$\rho v_E^3 l_E^2$。単位質量あたりでは，

$v_E^3/l_E \;\sim\; \epsilon$。ただし，$\epsilon$ は大渦から小渦への単位時間あたりのエネルギー移動。K-H Eq.(136) で粘性がきかないとして

$$\frac{\partial Q_{ll}}{\partial t} \sim \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r}\right) Q_{lll} \tag{142}$$

これを次元解析して大渦の時間スケール t_E を求めると

$$\frac{v_E^2}{t_E} \;\sim\; \frac{v_E^3}{l_E}$$

$$t_E \;\sim\; \frac{l_E}{v_E}$$

従って，大渦は，渦が１回転する時間スケールで変化する。

6.4.3 Kolmogorov のスケール

K-H Eq.(136) で対流項を無視すると

$$\frac{\partial Q_{ll}}{\partial t} \sim \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) Q_{ll} \tag{143}$$

これを次元解析して小渦の時間スケール t_K を求めると

$$\frac{v_K^2}{t_K} \;\sim\; \nu \frac{v_K^2}{l_K^2} \;\sim\; \epsilon$$

小渦は，渦が１回転する時間スケールで変化すると仮定すると $t_K \;\sim\; l_K/v_K$。これを上の式に代入すると

$$\frac{v_K}{l_K} \;\sim\; \frac{\nu}{l_K^2} \;\rightarrow\; R_K \;\sim\; \frac{v_K l_K}{\nu} \;\sim\; 1$$

$$v_K \;\sim\; \frac{\nu}{l_K} \qquad \epsilon \;\sim\; \frac{\nu^3}{l_K^4}$$

さらに，Kolomogorov のスケール式 (114) が得られる。

6.4.4 Taylor のマイクロスケールとマクロスケール

$Q_{ll}(r)$ は $r=0$ で最大で，r が大きくなるとともに小さくなる。この r を表す指標として

$$MicroScale: \;\; \lambda_l \equiv \frac{Q_{ll}(0)}{Q''_{ll}(0)}$$

$$MacroScale: \;\; \Lambda_l \equiv \int_0^\infty \frac{Q_{ll}(r)}{Q_{ll}(0)} dr$$

通常これらのスケールは $l_K < \lambda_l < \Lambda_l$ の関係にある。

6.5 シェルモデル

一様等方乱流に慣性領域が存在するとき，エネルギーは小さな波数から粘性の効く大きな波数へ移動する。移動の原因となるのは N-S Eq. における非線形項である。そこで，波数成分の時間発展において，波数間の相互作用を適当に取り入れることにより，一様等方乱流をモデル化する事ができる。スカラー波数が隣接する波数のみと相互作用することからこのモデルはシェルモデルと呼ばれる。代表的なシェルモデルである GOY モデルについて紹介する。

i 方向の速度の波数 $\vec{k}$ 成分を $u_i(\vec{k})$ としたとき N-S Eq. は

$$\frac{d}{dt}u_i(\vec{k}) + \nu k^2 u_i(\vec{k}) = -i \sum_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} k_j \left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2}\right) u_j(\vec{p}) u_l(\vec{q}) \tag{144}$$

左辺第１項は時間変化を表し，第２項は粘性項，右辺第１項は対流項，第２項は圧力項を表す。左辺は $\vec{p} + \vec{q} = \vec{k}$ を満たす異なる波数の成分との非線形な相互作用を表す。（線形であれば各波数は独立で相互作用しない。）

GOY(Gledzer-Ohkitani-Yamada) モデルでは波数空間を $k_i = 2^i k_0 \; (i = 0, ..N-1)$ の波数で表し，速度成分として複素成分 $u_i(t)$ であらわす。すなわち，１次元で考える。また，非線形項としては，次の３つの相互作用のみを考える。すなわち，注目している波数に対して i) より高い波数からの寄与。ii) より低い波数からの寄与。iii) 高い波数と低い波数からの寄与。

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k^2\right) u_i = +i\Big(c_i^{(1)} u_{i+1}^* u_{i+2}^* + c_i^{(2)} u_{i-1}^* u_{i+1}^* + c_i^{(3)} u_{i-1}^* u_{i-2}^*\Big) \tag{145}$$

ここで用いられる係数は

$$c_i^{(1)} = k_i, \;\; c_i^{(2)} = -\frac{1}{2}k_{i-1}, \;\; c_i^{(3)} = -\frac{1}{2}k_{i-2}$$

ただし，$c_{N-2}^{(1)} = {}_{N-1}^{(1)} = 0, c_0^{(2)} = c_{N-1}^{(2)} = 0 \; c_0^{(3)} = c_1^{(3)} = 0$。この GOY モデルは Kolmogorov のエネルギーカスケードを動的に再現できる。

6.6 Kolmogorov の-5/3 乗則 (K41) の問題点

- ϵ は本来ランダムな量であるはずだが，K41 では ϵ が空間的に一様であると仮定している。
- 局所的なエネルギーカスケードが空間的な混合よりも速ければ，ϵ はカスケードがすすむに従って（小さいスケールほど），ばらつきがでてくる。
- $\langle v^p \rangle / (\epsilon/k)^{p/3}$ が k に依存しない。

2001/06/13

6.7 K62（K41 の改良）

ϵ にスケール r に依存する揺らぎを取り入れる。

$$\epsilon_r \equiv \epsilon_r(\vec{x}, t) = \frac{3}{4\pi r^3} \int_{|\vec{y}|<r} \epsilon(\vec{x} + \vec{y}, t) dy \tag{146}$$

ϵ_r が対数正規分布，すなわち $\ln \epsilon_r$ が正規分布に従うとする。スケール $L \to l_n$ のカスケード過程 を考えると

$$\begin{array}{ccccc} L \to & l_1 = L/\Gamma \to & l_2 = l_1/\Gamma \to & \cdots \to & l_n = L/\Gamma^n \\ \epsilon_0 = \langle \epsilon \rangle \to & \epsilon_1 \to & \epsilon_2 \to & \cdots \to & \epsilon_n \end{array}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_r = \epsilon_n &= \epsilon_0 \times \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \times \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \times \cdots \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n-1}} \\ \ln \epsilon_r &= \ln \epsilon_0 + \ln e_1 + \ln e_2 + \cdots + \ln e_n \end{aligned} \tag{147}$$

ただし，$e_i \equiv \epsilon_i/\epsilon_{i-1}$。$\ln \epsilon$ は中央極限定理により正規分布になる。これを

$$P(\epsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r \epsilon_r} \exp\left(-\frac{(\ln \epsilon_r - m_r)^2}{2\sigma_r^2}\right) \tag{148}$$

ただし，$m_r = \ln \epsilon_0 - \sigma_r^2$, $\sigma_r^2 = A + \mu \ln L/r$。すなわち，揺らぎの大きさが $\mu \ln L/r$ の依存性をもち，r が小さくなるほど揺らぎが大きくなる。

スペクトルを求めるために $\left\langle \epsilon_r^{2/3} \right\rangle$ を計算すると

$$\left\langle \epsilon_r^{2/3} \right\rangle = \int \epsilon_r^{2/3} P(\epsilon_r) d\epsilon_r \propto \epsilon_0^{2/3} \left(\frac{L}{r}\right)^{-\mu/9} \tag{149}$$

エネルギースペクトルは $v \sim (\epsilon/k)^{1/3}$ を用いて

$$E(k) \sim \frac{v^2}{k} \propto \epsilon_0^{2/3} k^{-5/3} k^{-\mu/9} \tag{150}$$

K41 の-5/3 乗則とは $-\mu/9$ 乗だけ異なる。また，$\langle v^p \rangle / (\epsilon/k)^{p/3}$ は $k^{\mu p(p-1)/3}$ に比例する。

6.8 フラクタル次元によるスペクトル表現

フラクタルとは，スケール変換しても形が変わらない図形を指す。一様等方乱流における慣性領域もスケール変換に対して不変であるので，これをフラクタルと見なせると仮定する。

ここでは，散逸が一様ではなく，3より小さいフラクタル次元で起きると考える。スケールを $1/k$ したときの散逸の起きている要素の数を N とし，$N = k^D$ でフラクタル次元 D を定義する。このとき，全体積に対する散逸の起きる要素の割合は k^D/k^3 要素内の ϵ^* は全体で平均した ϵ_0 よりも大きく

$$\epsilon^* = \frac{k^3}{k^D}\epsilon_0 = \epsilon_0 k^{3-D}$$

さらに，$\langle \epsilon^{2/3} \rangle = \langle \epsilon^* \rangle^{2/3} \times k^D/k^3 = \epsilon_0^{2/3} k^{(D-3)/3}$ となり，エネルギースペクトルは

$$E(k) = \left\langle \epsilon^{2/3} \right\rangle k^{5/3} = \epsilon_0^{2/3} k^{(D-3)/3} k^{-5/3} \tag{151}$$

2001/06/20

7 2次元ジェット

Reynolds 数が非常に大きく，乱流状態になっていてもある仮定により，次元を減らし，解析解を得ることが出来る場合がある。ここでは，2次元定常ジェット（噴流）を取り上げる。仮定の具体的な中身はジェットであること，Reynolds 数が大きいこと，自己相似性を持つこと，渦粘性の採用である。

ある開口から流体が噴出す場合をジェットと言う。流れの方向を x，垂直な方向を y とする。噴出し口から十分下流では，流れの様子はジェットの速さ $U_s(x)$，幅 $l(x)$，x 方向の変化のスケール $L(x)$ をパラメータとして表せる。このジェットの流れの分布 $U(x, y)$ を求めること目標とする。$L \gg l$ をジェットの定義とすると，流れの様子は，L には依存せず，U は $y/l(x)$ と $U_s(x)$ のみの関数となる。これを自己相似性の仮定と呼ぶ。

平均流，変動流の x, y 成分をそれぞれ，U, V, u, v とする。U_s, L, l でオーダー評価を行うと連続の式 $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ から，$V = O(U_s l/L)$。一方，Reynolds 分解した N-S Eq. の y 成分は

$$U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{uv} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{v^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y^2}\right) \tag{152}$$

この各項オーダー評価を行うと

$$\frac{\partial}{\partial y}\overline{v^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \tag{153}$$

ここで，$L \gg l$，Reynolds 数が十分大きく粘性項に Rynolds 応力が大きい，$\frac{U_s^2 l}{L^2} \ll \frac{u^2}{l}$ とした。最後の仮定は式 (156) のオーダー評価で確かめられる。この式を変形すると

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{v^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{154}$$

同様にして，N-S Eq. の x 成分は

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{u^2 - v^2} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{uv} = \nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y^2}\right) \tag{155}$$

ここで，式 (154) を用いた。先と同様にオーダー評価を行うと

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{uv} = 0 \tag{156}$$

この式から $O\left(\frac{U_s}{u}\right) = O\left(\sqrt{\frac{L}{l}}\right)$ が成立しなければならない。

ここで自己相似性から $\xi = y/l, l(x), U_s(x)$ を用いて，

$$U = U_s f(\xi) \tag{157}$$

$$-\overline{uv} = U_s^2 g(\xi) \tag{158}$$

とする。ここで，$f=O(1)$, $g=O(l/L)$ である。また V は連続の式から

$$V=-\int_0^y \frac{\partial U}{\partial x}dy=-l\int_0^\xi\left(\frac{dU_s}{dx}f-\frac{U_s}{l}\frac{dl}{dx}\xi f'\right)d\xi \tag{159}$$

これを式 (156) に代入すると

$$g'=\frac{l}{U_s}\frac{dU_s}{dx}f^2-\frac{dl}{dx}\xi ff'-\frac{l}{U_s}\frac{dU_s}{dx}f'\int_0^\xi fd\xi+\frac{dl}{dx}f'\int_0^\xi \xi f'd\xi \tag{160}$$

この式の左辺は x の関数ではないので，$\frac{l}{U_s}\frac{dU_s}{dx}=const.$, $\frac{dl}{dx}=const.$ 従って，$l\propto x$。

一方，ジェットの x 方向の運動量の流れを考えると，これを y で積分した量は x によらず一定。すなわち，$U_s^2 l=const.$。これと $l\propto x$ より，$U_s\propto 1/\sqrt{x}$。

ここで渦粘性 ν_T を採用し，実効的な Reynolds 数 $R_T\equiv U_sl/\nu_T$ が一定であるとすると，Reynolds 応力は

$$\begin{aligned}-\overline{uv} &= \nu_T\frac{\partial U}{\partial y}\\ U_s^2 g &= \frac{\nu_T}{l}f'\\ &\rightarrow\quad g=\frac{f'}{R_T}\end{aligned} \tag{161}$$

これを式 (160) に代入し整理すると

$$f''=-\frac{1}{2}R_T\left(f^2+f'\int_0^\xi fd\xi\right) \tag{162}$$

これは解析解

$$f=\mathrm{sech}^2(\xi/\sqrt{2})=\left(\frac{2}{e^{\xi/\sqrt{2}+e^{-\xi/\sqrt{2}}}}\right)^2 \tag{163}$$

をもつ。

8 乱流の計算方法

ここでは，どのように乱流をモデル化し，数値計算をおこなうかについて，幾つかの手法を紹介する。

8.1 直接数値計算の難しさ

偏微分方程式である Navier-Stockes 方程式を直接数値計算することを Direct Numerical Simulation (DNS) と呼ぶ。差分方程式, (フーリエ）モード展開を行って DNS を実行することになるが，そのためには，十分細かい時間・空間メッシュ，あるいはモード数をとる必要がある。システムの Reynolds 数を UL/ν とする。一方，Kolmogorov のスケール（粘性が支配的になるスケール）は

$$l_K\sim(\nu^3/\epsilon)^{1/4},\quad t_K\sim(\nu/\epsilon)^{1/2}$$

$\epsilon\sim v^3/l$ より，空間スケールの比は

$$\frac{l_k}{L}\sim\left(\frac{\nu}{UL}\right)^{3/4}=R^{-3/4}$$

となり，時間スケールの比は $T\sim L/U$ として

$$\frac{t_K}{T}\sim\left(\frac{\nu}{UL}\right)^{1/2}=R^{-1/2}$$

となる。従って，計算量が空間メッシュ数 × 時間メッシュ数で決まるとすると 3 次元の場合には

$$R^{9/4}\times R^{1/2}=R^{2.75}$$

ここで，$U=10$m/s (36km/h) で走行する自動車を考える。空気の動粘性係数が $\nu=2\times10^{-5}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, 自動車のサイズを $L=2m$ とすると $R\sim10^6$ となり，メッシュの数は

$$10^{13.5}\times10^3$$

となる。従って最高級の計算機をもってして，やっと手の届く範囲にある。

従って，多くの数値計算では，十分な空間メッシュを確保できない。これにより数値粘性と呼ばれる偽の粘性が発生する。数値計算（特に差分）では，メッシュの内部では，速度などの物理量は一定であり，隣のメッシュとの差は小さく，十分滑らかに場を表さなければならない。すなわち，メッシュのサイズでは粘性が十分大きく場が滑らかに変化することと同等である。逆に場の変化が十分滑らかになるように出来なければ数値的な不安定性が発生する。

2001/06/27

8.2 直接計算と平均量計算

多くの場合，乱流の微細な構造には関心がなく，乱流の結果生じる平均流，統計平均量を求めることが目的である。このような場合に何らかの平均操作を行い，平均量のみの方程式 (モデル）を構築し，これを解くことができる。これは，何らかの方法で乱流の打ち止めを行うことであり 必ずしも正しいとは限らない。

一様等方乱流における Karman-Howarth 方程式は速度の 2 点 2 重相関，2 点 3 重相関という統計平均量についての方程式であった。

一様等方でない場合には Reynolds 分解により，平均流の方程式が得られる。この時，方程式の中に現われる Reynolds 応力を何らかのモデルで平均量の関数として表現できれば，閉じた方程式が得られる。これらの方法は Rynolds 応力をモデル化するのに必要な方程式の数で分類される。平均流の方程式の方程式を解くことは，直接数値計算のように粘性のスケールを扱う必要がない。

8.3　0 方程式モデル

Reynolds 応力は以下の 2 種の方法でモデル化される。

- 混合距離モデル
  x 方向の平均流の速度 U が y 方向に $\frac{\partial U}{\partial y}$ に変化しているとき，混合距離 l を用いて，変動速度が $u \sim v \sim \frac{\partial U}{\partial y} l$ で表されると考える。この時，Reynolds 応力は

$$-\overline{uv} = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \tag{164}$$

  となる。

- 渦粘性モデル
  Businesque は粘性係数が乱流状態では大きくなると考え Reynolds 応力を

$$-\overline{uv} = \nu_T \frac{\partial U}{\partial y} \tag{165}$$

  この粘性係数 ν_T を渦粘性と呼ぶ。

これらはいづれも，Reynolds 応力を単純に計算できる。一方，後述する 1 方程式，2 方程式モデルでは，Reynolds 応力を求めるために，余分に 1 つまたは 2 つの方程式を解かなければならない。

8.4　乱流の基礎方程式

N-S Eq. で平均成分の方程式は

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} U_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{P}{\rho} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} U_i - \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_j u_i} \tag{166}$$

であり，変動成分の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad = \quad & -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{p}{\rho} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ & -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i u_j - \overline{u_i u_j}\right) \end{aligned} \tag{167}$$

ここで乱れのエネルギー

$$K \equiv \frac{1}{2}\overline{u_i^2} \tag{168}$$

と Reynolds 応力によるエネルギー散逸

$$\epsilon \equiv \overline{\tau_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = \frac{\nu}{2}\overline{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} \tag{169}$$

を定義する。これらの従う方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} + U_i \frac{\partial K}{\partial x_i} &= -R_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\overline{pu_j}}{\rho} + \frac{\overline{U_i^2 u_j}}{2} - \overline{\nu u_i\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}\right] \end{aligned} \tag{170}$$

右辺第 1 項は乱流エネルギーの生成，第 2 項は輸送，第 3 項は散逸を表す。ϵ の従う式は

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} = -W - \frac{\partial}{\partial x_j} H_j + \nu \nabla^2 \epsilon \tag{171}$$

ただし，

$$\begin{aligned} W \quad \equiv \quad & 2\nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_k}} + 2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \\ & 2\nu^2\overline{\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}\right)^2} + 2\nu \overline{u_j\frac{\partial U_j}{\partial x_k}}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} \end{aligned} \tag{172}$$

$$H_j \equiv \frac{2\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial p}{\partial x_k}} + \nu \overline{u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \tag{173}$$

8.5　1 方程式モデル

$K = \overline{u_i u_i}/2$ をモデル化する。Reynolds 応力は K と渦粘性 ν_T を用いて

$$R_{ij} = \overline{u_i u_j} = \frac{2}{3}K\delta_{ij} - \nu_T\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \tag{174}$$

と表される。一方，Prandtl の混合距離仮説によれば，

$$\overline{u_i u_j} \sim l \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \nu_T \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\nu_T \sim lu \sim l\sqrt{K}$$

そこで，

$$\nu_T = \sqrt{K} l \tag{175}$$

で混合距離 l を定義する。K の式は式 (170) を簡略化して

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + R_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_T}{\sigma_k}\frac{\partial K}{\partial x_j}\right) - c^* \frac{K^{3/2}}{l} \tag{176}$$

ただし，σ_K, σ_k は無次元定数で $\epsilon = c^* \frac{K^{3/2}}{l}$。解くべき方程式はこの K の式と平均流の N-S Eq.(166) と連続の式 $\frac{\partial U_i}{\partial x_i}$。このモデルは 2 つの無次元パラメータ c^*, σ_K と流れによって決まる混合長 l をもつ。

8.6　2 方程式モデル（$K - \epsilon$ モデル）

1 方程式モデルでは，ϵ を K の関数として与えたが，ここでは，ϵ を変数として，ϵ の方程式を作る。次元解析により渦粘性は無次元定数 c_μ を用いて

$$\nu_T = C_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \tag{177}$$

と定義する ϵ の式 (171) を簡略化して，

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = -C_{\epsilon 1}\frac{\epsilon}{K}R_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2}\frac{\epsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon}\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}\right) \tag{178}$$

解くべき式は，連続の式，平均流の N-S Eq.，Reynolds 応力の式 (174)，K の式

$$\frac{\partial K}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+R_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial x_i}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_T}{\sigma_k}\frac{\partial K}{\partial x_j}\right)-\epsilon \quad (179)$$

このモデルには無次元定数 C_μ，$C_{\epsilon 1}$ $C_{\epsilon 2}$，σ_ϵ が使われている。

8.7 大渦シミュレーション

Large Eddy Simulation とよばれ，今までの 0, 1, 2 方程式モデルと異なり，空間の粗視化を行うのが特徴。幅 Δ をもつ関数 G を定義して G との畳み込み

$$U=\int G(x-x')u(x')dx'=G^*u \quad (180)$$

で粗視化した成分と格子内成分に分ける。すなわち，$u_i=U_i+u'$ とする。粗視化と Rynolds 分解の類似性に注意。

$$\begin{aligned}G^*u_iu_j &= G^*(U_iU_j)+G^*(u_i'U_j+U_iu_j'+u_i'u_j')\\ &= U_iU_j+L_{ij}+M_{ij} \quad (181)\end{aligned}$$

として，N-S Eq. を粗視化すると

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}U_iU_j=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}L_{ij}-\frac{\partial}{\partial x_j}M_{ij}+\nabla^2U_i \quad (182)$$

ただし，

$$\begin{aligned}L_{ij} &= G^*(U_iU_j)-U_iU_j\\ M_{ij} &= \frac{2}{3}K^*\delta_{ij}+\nu_{SG}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) \quad (183)\end{aligned}$$

ここで，L_{ij} は Lenard 応力と呼ばれ，通常は無視される。また，方程式に出てくるパラメータは

$$\begin{aligned}\nu_{SG} &= (C_S\Delta)^{4/3}\epsilon^{1/3}\\ K^* &= G^*\left(\frac{u_i'u_j'}{2}\right)=(C_K\Delta)^{2/3}\epsilon^{1/3} \quad (184)\end{aligned}$$

とパラメータ C_S, C_K であらわされ，ϵ は

$$\epsilon=M_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (185)$$

から計算される。これらの方程式と連続の式から Large Eddy Simulation は構成される。

2001/07/04

9 スケーリングと不変原理

次元解析は，Kolmogorov の一様等方乱流，2 次元ジェットにおいて重要な役割を果たした。ここでは，次元解析からスケール不変を導き，種々のスケーリング則に対する拘束条件を導く。

9.1 円管内の流れ

Sec.4.4 で円管内の流れについて層流での解析解と乱流での経験則を紹介した。これらは管摩擦係数 λ を用いて

$$\frac{\dot{\mathrm{P}}}{dx} = \lambda\frac{\rho V^2}{2d} \quad (186)$$

$$\lambda=\frac{64}{R}\quad \text{層流の場合} \quad (187)$$

$$\lambda=\frac{0.316}{R^{1/4}}\quad \text{乱流の場合} \quad (188)$$

と表される。これらはスケーリング則の一種で，λ がパラメータにどのように依存するかを示している。

ここで，スケール変換に対する不変性をどうにゅうすることにより，これらのスケーリング則に拘束条件に与えることができる。特に経験則を決めるときには，このような考え方は重要である。

円管の流れの基礎方程式は N-S Eq.

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\cdot\nabla v=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\nabla^2 v$$

である。ここで，スケール変換

$$x\to\lambda_1 x\,,\quad v\to\lambda_2 v\,,\quad t\to\lambda_3 t\,,\quad P/\rho\to\lambda_4 P/\rho\,,\quad \nu\to\lambda_5\nu\,,$$

を考える。この変換に対して，現象が不変であるためには，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ の間に一定の関係がなければならない。N-S Eq. にスケール変換を施すと各項は

$$\lambda_2\lambda_3^{-1}=\lambda_2^2\lambda_1^{-1}=\lambda_1^{-1}\lambda_4=\lambda_5\lambda_1^{-2}\lambda_2$$

これらを解くと

$$\lambda_3=\lambda_1\lambda_2^{-1},\quad \lambda_4=\lambda_2^2,\quad \lambda_5=\lambda_1\lambda_2$$

従って，現象を不変にするスケール変換は

$$\begin{aligned}&x\to\lambda_1 x\,,\quad v\to\lambda_2 v\,,\quad t\to\lambda_1\lambda_2^{-1}t\,,\\ &P/\rho\to\lambda_2^2P/\rho\,,\quad \nu\to\lambda_1\lambda_2\nu\,, \quad (189)\end{aligned}$$

ここで，経験式

$$\frac{d(P/\rho)}{dx}=Cd^\alpha V^\beta\nu^\gamma$$

の関係式が得られたとする。先のスケール変換に対して不変（C も含めて）であるので，

$$\lambda_2^2\lambda_1^{-1}=\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta(\lambda_1\lambda_2)^\gamma \quad (190)$$

これらから

$$\alpha=-1-\gamma,\quad \beta=2-\alpha \quad (191)$$

したがって，管摩擦係数は

$$\frac{dP}{dx}=Cd^{-1-\gamma}V^{2-\gamma}\nu^\gamma=C\frac{V^2}{d}\left(\frac{\nu}{dV}\right)^\gamma$$

ここでは γ は任意であるから，もっと一般的には

$$\frac{dP}{dx}=C\frac{V^2}{d}F(R)$$

9.2　プラズマの閉じ込め時間

プラズマにおいて輸送を評価する量として閉じ込め時間 τ がよく用いられる。τ はプラズマのエネルギーと入力パワーの比で与えられる。非圧縮抵抗性 MHD モードが τ を決めていると仮定する。この基礎方程式は

$$\begin{aligned}
& mn\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right) = -\nabla p + \vec{j}\times\vec{B} \\
& \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\vec{v}) = 0 \\
& \nabla\cdot\vec{v} = 0 \\
& \vec{E} + \vec{v}_e\times\vec{B} = \eta\vec{j} - \frac{\nabla p_e}{en} \\
& \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla\times\vec{E} \\
& \eta \propto T^{-3/2} \propto \left(\frac{p}{n}\right)^{-3/2}
\end{aligned} \tag{192}$$

これに対して，スケール変換

$$\begin{aligned}
& x \to \lambda_1 x, \quad v \to \lambda_2 v, \quad t \to \lambda_3 t, \\
& n \to \lambda_4 n, \quad B \to \lambda_5 B, \quad E \to \lambda_6 E, \\
& P \to \lambda_7 P, \quad j \to \lambda_8 j, \quad \eta \to \lambda_9 \eta
\end{aligned} \tag{193}$$

を行うと上の基礎方程式は

$$\begin{aligned}
& \lambda_4\lambda_2\lambda_3^{-1} = \lambda_4\lambda_2^2\lambda_1^{-1}\lambda_7\lambda_1^{-1} = \lambda_8\lambda_5 \\
& \lambda_4\lambda_3^{-1} = \lambda_1^{-1}\lambda_4\lambda_2 \\
& \lambda_6 = \lambda_2\lambda_5 = \lambda_9\lambda_8 = \lambda_7\lambda_1^{-1}\lambda_4^{-1} \\
& \lambda_8 = \lambda_1^{-1}\lambda_5 \\
& \lambda_5\lambda_3^{-1} = \lambda_1^{-1}\lambda_6 \\
& \lambda_9 = \lambda_7^{-3/2}\lambda_4^{3/2}
\end{aligned} \tag{194}$$

$\lambda_2 = \lambda$ として整理するとスケール変換は

$$\begin{aligned}
& x \to \lambda^{-4} x, \quad v \to \lambda v, \quad t \to \lambda^{-5} t, \\
& n \to \lambda^8 n, \quad B \to \lambda^5 B, \quad E \to \lambda^6 E, \\
& P \to \lambda^1 0P, \quad j \to \lambda^9 j, \quad \eta \to \lambda^{-3}\eta
\end{aligned} \tag{195}$$

ここで，求めたい τ の式を密度 n，温度 T，磁場 B，半径 a

$$\tau = Cn^pT^qB^ra^s \tag{196}$$

とし，スケール変換に対して C が不変であるためには，

$$\begin{aligned}
& \lambda^{-5} = \lambda^{8p}\lambda^{2q}\lambda^{5r}\lambda^{-4s} \\
& 2p + \frac{q}{2} + \frac{5}{4}r - s = -\frac{5}{4}
\end{aligned} \tag{197}$$

$$\begin{aligned}
\tau &\propto n^pT^qB^ra^{2p+\frac{q}{2}+\frac{5}{4}r+\frac{5}{4}} \\
&\propto (na^2)^p(T\sqrt{a})^q + (Ba^{5/4})^{r+1}B^{-1}
\end{aligned} \tag{198}$$

したがって，

$$\tau = \frac{1}{B}F(na^2, T\sqrt{a}, Ba^{5/4})$$