乱流輸送物理学2021年度レポート課題

提出期限：1月29日（土）

提出先：ejiri@k.u-tokyo.ac.jp

備考: 形式（目的，背景，方法，結果，考察，結論）を整えてください。pdf または word ファイルで上記に送ってください。計算に用いたソースコードは不要です。

以下のなかから１つの課題を選択し，レポートを提出せよ。

- 拡散方程式とランダムウォーク（Random walk）
  ２次元平面のランダムウォークにおいて、下記の二つのケースをシミュレーションせよ。
  （１）原点に配置した点が広がっていく様子を調べよ。
  （２）２次元平面内のランダムウォークにおいて、複数の登場人物（モンスター、人、勇者など）の動きをシミュレーションせよ。ただし、登場人物の位置が重なった時の行動パターン等（捕食、反発、一方向への逃避等、あるルールに従って、移動先を選定）を決める。また、空間的な境界条件としては、周期境界、壁・障害物、湧きだし口が考えられる。

- ランジュバン方程式 (Langevin Eq.)
  株価の不規則な変動を表すのにランジュバン方程式

  $$\frac{d}{dt}v = -\zeta v + f(t), \quad v = \frac{d}{dt}x$$

  をもちいることがある。ζ が負である場合には，この方程式は不安定で発散する。次の条件で数値的に解いて解の振る舞いを調べよ。
  ζ は平均が正で、ゆっくりと変化する乱数とする。一方、$f(t)$ は揺動力を表し、数値計算の各ステップでランダムに変わり、平均が０の乱数である。乱数の範囲，平均，ζ の変化する時間スケールを変えて解の振る舞いを調べよ。

- シェルモデル（GOY モデル）（Shell model）
  シェルモデルの数値計算を行い，十分時間がたった後の定常状態でのエネルギースペクトルの形を調べよ。

  $$\left(\frac{d}{dt} + \nu k^2\right) u_i = +i\Big(c_i^{(1)} u_{i+1}^* u_{i+2}^* + c_i^{(2)} u_{i-1}^* u_{i+1}^* + c_i^{(3)} u_{i-1}^* u_{i-2}^*\Big)$$

  ここで用いられる係数は

  $$c_i^{(1)} = k_i,\ c_i^{(2)} = -\frac{1}{2}k_{i-1},\ c_i^{(3)} = -\frac{1}{2}k_{i-2}$$

  ただし，$c_{N-2}^{(1)} =_{N-1}^{(1)} = 0,\ c_0^{(2)} = c_{N-1}^{(2)} = 0\ c_0^{(3)} = c_1^{(3)} = 0$。

  このモデルでは，u_i は、i 番目のスケールでの速度を表す複素数であり、全エネルギーは $\sum |u_i|^2$，エネルギースペクトルは $E(k) = |u_i|^2/k_i$ で与えられる。

  （ヒント）
  数値計算のパラメータを正しく選ばないと計算が発散する。そこで，下記のパラメータを参考にせよ。

  $$N \sim 14,\ k_0 = 2^{-4},\ \nu \sim 10^{-5}$$

  $$\Delta t \leq 10^{-3},\ step\,数 > 10^5$$

  ここで，Δt は数値積分の時間幅を表す。また，初期条件として $|u_i| \sim 1$ を選ぶ。また，これは散逸系なので，定常状態を実現するには，エネルギーを注入し続けなければならず、ある i のスケールでの u_i を定数とせよ。

- ダフィング方程式 (Duffing Eq.)
  ダフィング方程式を数値的に解いて解のふるまいを調べよ。

  $$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V \\ \frac{dV}{dt} &= -\zeta V - \omega_0^2 X - gX^3 + h\cos\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \Omega \end{aligned}$$

  ただし、$\zeta \sim 0.05$、$\omega_0 \sim 1$、$\Omega \sim 6$、$h \sim 20$ とし、g を増やしていった時の $X - V$ 空間での軌道の変化を示せ。 (see Chap.8 Page 16)

- 確率共鳴（Stochastic resonance）
  下記の方程式を数値的に解いて確率共鳴の現象を調べよ。

  $$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{dV}{dx} + f(t) \\ V(x) &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - xh\cos\Omega t \end{aligned}$$

  ただし、$u = \frac{dx}{dt}$ は速度、$f(t)$ は揺動力、$V(x)$ はポテンシャルである。

- パラメトリック不安定性（Parametric instability）
  講義資料 Chap10, Page 9 を参考にして、パラメトリック不安定性を数値計算で示せ。

- 自由課題（Original task）
  乱れ，乱流，揺らぎ，流れに関するオリジナルな課題を設定し，実行せよ。また，背景説明を詳しくしてください。

Report task list for the lecture 'Turbulent Induced Transport AY2021'

Due date： Jan. 29 (Sat.)

Send file to ejiri@k.u-tokyo.ac.jp

Note: Style: background, objective, method, results, discussion, conclusion. pdf file or word file. Code is not necessary.

Select one from the following list.

- Diffusion and Random walk

  Simulate the following two 2-dimensional random walk.

  (1) Show and discuss the diffusion of particles starting from the origin.

  (2) Assume several chracters （e.g. monsters, people, heroes), and simulate their random walk. You should make some rules or walking patterns, such as predation, subjugation, repulsion, escape in one direction. You may also set boundary conditions, such as periodic (connected) space, wall, obstacles, source.

- Langevin Eq.

  To represent the irregular fluctuations of a stock price the following Lagevin Eq. can be used

  $$\frac{d}{dt}v = -\zeta v + f(t), \quad v = \frac{d}{dt}x$$

  When ζ is negative, the system is unstable and v can diverge. Investigate the behaviour of v and x by a numerical calculation.

  See the effects on v and x when you change the value of $\langle\zeta\rangle > 0$, and the range of fluctuating ζ.

  ζ is a slowly varying random variable with positive mean value, while $f(t)$ is a random force fluctuating at each time step with zero mean value.

- Shell model (GOY model)

  Perform a shell model simulation, and show the energy spectrum after a sufficient time, where the spectrum becomes stationary. Check the shape of the spectrum.

  $$\left(\frac{d}{dt} + \nu k^2\right) u_i = +i\Big(c_i^{(1)} u_{i+1}^* u_{i+2}^* + c_i^{(2)} u_{i-1}^* u_{i+1}^* + c_i^{(3)} u_{i-1}^* u_{i-2}^*\Big)$$

  Here the coefficients are defined as follows.

  $$c_i^{(1)} = k_i,\ c_i^{(2)} = -\frac{1}{2}k_{i-1},\ c_i^{(3)} = -\frac{1}{2}k_{i-2}$$

  Here, $c_{N-2}^{(1)} =_{N-1}^{(1)} = 0,\ c_0^{(2)} = c_{N-1}^{(2)} = 0\ c_0^{(3)} = c_1^{(3)} = 0$。

  u_i represents the complex velocity at i-th scale, and the energy is given by $\sum |u_i|^2$. The energy spectrum is $E(k) = |u_i|^2/k_i$.

  Note: the following shows the recommended parameters.

  $$N \sim 14,\ k_0 = 2^{-4},\ \nu \sim 10^{-5}$$

  $$\Delta t \le 10^{-3},\ \text{time step number} > 10^5$$

  Here, Δt represents the time step, The recommended initial conditions and boundary conditions are as follows. $|u_i| \sim 1$. To obtain a stationary state, we need to inject energy. Thus, one idea is to set a certain $u_i = const.$ for i-th scale.

- Duffing Eq.

  Solve the equation and investigate the behaviour.

  $$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V \\ \frac{dV}{dt} &= -\zeta V - \omega_0^2 X - gX^3 + h\cos\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \Omega \end{aligned}$$

  Set $\zeta \sim 0.05$、$\omega_0 \sim 1$、$\Omega \sim 6$、$h \sim 20$, and show the variation of orbits in $X-V$-space when you increase g (see Chap.8 Page 16).

- Stochastic resonance)

  Solve the following equation and investigate the stochastic resonance.

  $$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{dV}{dx} + f(t) \\ V(x) &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - xh\cos\Omega t \end{aligned}$$

  Here, $u = \frac{dx}{dt}$ is the velocity, $f(t)$ is the random force, $V(x)$ is the potential.

- Parametric instability

  Show and investigate the parametric instability. See Chap10, Page 9 for the numerical simulation.

- Original task

  Make an original task on turbulence or turbulent flow or fluctuations or fluid flow, and perform the task. You should describe the background.