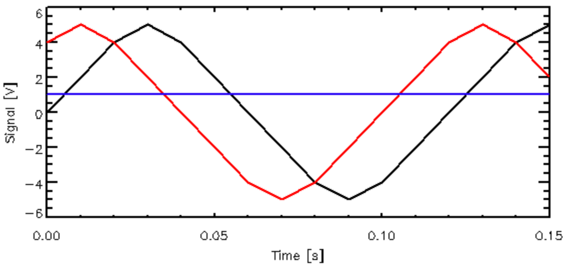
計測情報処理　前半部レポート（その１）

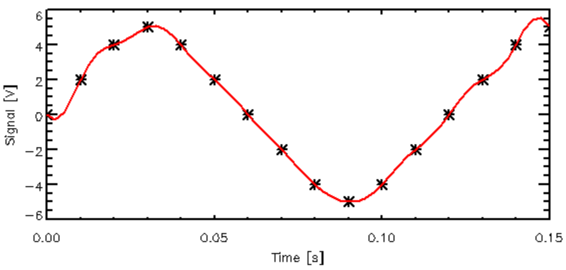
〆切：５月８日、提出：ejiri@k.u-tokyo.ac.jp に PDF で送ってください。

以下の３種のデータのフーリエ変換を行い、パワースペクトルを求めて、最下段のような図を描け。また、Parsval's law（パーシバルの公式）を確認せよ

Time[s]	Sig-A[V]	Sig-B[V]	Sig-C[V]
0.000	0.000	4.000	1.000
0.010	2.000	5.000	1.000
0.020	4.000	4.000	1.000
0.030	5.000	2.000	1.000
0.040	4.000	0.000	1.000
0.050	2.000	-2.000	1.000
0.060	0.000	-4.000	1.000
0.070	-2.000	-5.000	1.000
0.080	-4.000	-4.000	1.000
0.090	-5.000	-2.000	1.000
0.100	-4.000	0.000	1.000
0.110	-2.000	2.000	1.000
0.120	0.000	4.000	1.000
0.130	2.000	5.000	1.000
0.140	4.000	4.000	1.000
0.150	5.000	2.000	1.000

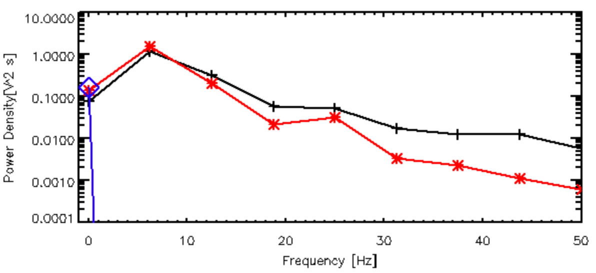


信号 A, B, C の生波形



信号 A と、フーリエ級数展開で求めた A の一致の様子。

後者は､時間幅を小さくして滑らかな関数となることを示した。



信号 A, B, C のパワースペクトル密度。

A と B の信号は似ているが、境界での値の不連続性（ギブス現象）の度合いが異なり、高周波でのパワーが異なる。C は直流なので周波数 0 の成分しか持たない。

ヒント

ライブラリ（ツール）：

出来合いにライブラリは、フーリエ変換の定義や値の返し方にバリエーションがあり、全パワーの求め方が異なることもある。多くの場合、cos, sin ではなく、exp(iωt), exp(-iωt)で変換する。また、出力配列の順序は基本周波数をΔωとした時に、0, Δω, Δω,... ,(N/2) Δω, −(N/2−1) Δω,.....,−Δωと周波数がナイキスト周波数に達した後に負の最大周波数から始まるので注意が必要。

FFT：

フーリエ変換時の計算量は N^2 に比例するが、重複した計算を省略し計算量を減らした手法に高速フーリエ変換（FFT）がある。これにより、計算量は N logN 程度となり、通常ライブラリは FFT を採用しているが、FFT が有効となるためには、N が特定の素数の n 乗の掛け合わせである必要がある。例えば、$N=2^a \times 3^b \times 5^c$。どのような素数の組み合わせが有効であるかはライブラリに依存する。

周波数：

測定時間は、0.01 sec ごとであるので、最高周波数の周期は 0.02 sec、ナイキスト周波数は 50 Hz、基本周波数は、測定時間 0.01 sec x 16=0.16 sec の逆数 6.25 [Hz]。従って、周波数は、 0, 6.25, 12.50, 18.75, 25.00, 31.25, 37.50, 43.75, 50.00 [Hz]の 9 種。

Sin-Cos フーリエ変換とパーシバルの公式：

$$\text{基本周波数}\Delta f = 1/n\Delta t$$

$$A_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \quad (\text{直流成分})$$

$$A_l = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k\, 2\cos(\frac{2\pi kl}{n}), \quad B_l = \frac{\Delta t}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k\, 2\sin(\frac{2\pi kl}{n}), (l\times\Delta f\text{の成分}, l = 1\cdots n/2-1)$$

$$A_{n/2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \cos(\pi k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k (-1)^k \qquad (\text{ナイキスト周波数成分})$$

$$\begin{pmatrix} A_l\text{を計算する時は}\langle\cos\rangle = \langle\cos\rangle = 1/2\text{を考慮して}2\text{をかける。} \\ \text{逆に}A_0\text{、}A_{n/2}\text{は二乗平均が}1\text{なので}2\text{はかけない} \end{pmatrix}$$

$f_k = A_0 + A_1\cos(\frac{2\pi k}{n}) + B_1\sin(\frac{2\pi k}{n}) + \cdots + A_{n/2}\cos(\pi k)$で元の式を近似できる（グラフ中段参照）

パワースペクトルは$A_0^2, (A_1^2+B_1^2)/2, \cdots A_{n/2}^2$となる。

全パワーは$A_0^2 + (A_1^2+B_1^2)/2 + \cdots + A_{n/2}^2 = \langle y^2\rangle$。

この等式（パワースペクトルの和と元の信号の二乗平均が等しい）をパーシバルの公式という。

パワースペクトル密度は、単位周波数当たりのパワーとして表現した量で、

この例の場合は$A_0^2, (A_1^2+B_1^2)/2, \cdots A_{n/2}^2$を周波数間隔（基本周波数）の$6.25Hz$で割る。

逆に全パワーを求める時は積分を行うので$\Delta f = 6.25Hz$をかけて和をとる。

信号Cは直流の$1V$であるので、平均パワー（実効値）は$1^2 = 1[V^2]$。

パワースペクトル密度は、単位周波数の$6.25Hz$で割って$1/6.25 = 0.16[V^2 \sec]$と図ではプロットした。