プラズマ物理学講義レジュメ

江尻晶

2003 年度夏学期

目 次

1　この講義の目的

プラズマとは荷電粒子の集合である。各粒子は磁場，電場の中で複雑な軌道を描くだけでなく，電場と磁場を自ら生成し相互作用する。粒子の集合は衝突，拡散によって熱平衡状態に近づこうとするが，高温で閉込めのよい系は，衝突，拡散が小さく，熱平衡状態からはるかに離れたところにある。プラズマ物理学の基本概念を述べるとともに，身の回りから天体にいたるまでのプラズマを紹介する。

2　様々なプラズマ

物体の温度を上げていくと固体，液体，気体の状態を経て，イオンと電子に電離したプラズマの状態になる。電離過程には

- 電子衝突電離
- イオン衝突電離
- 光電離
- 熱電離

等がある。ここでは，人工的に作り出した実験室プラズマと自然界に存在するプラズマを基本パラメータである温度と密度のダイアグラムで見ていく。

2.1 実験室のプラズマ

図１にプラズマ生成装置名とそのプラズマの温度，密度領域を示す。

温度の単位は 1eV=11,604K。密度の単位は数密度。ちなみに１気圧室温の数密度は，$2.5 \times 10^{25}\mathrm{m}^{-3}$。

プラズマ中の電位は，電子により遮蔽される。その特徴的なスケールである Debye 長は

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{n\,(e)^2}} \tag{1}$$

である。このスケールがシステム（装置）のスケールに比べて十分短いとき，システムは準中性状態にあり，これが，狭義のプラズマの条件である。

電子はイオンと衝突する。衝突により軌道が変わり，運動量を失う。衝突は拡散，熱平衡，抵抗の源である。電子のイオンとの衝突周波数は

$$\nu_{ei} = \frac{n_e Z e^4 \ln \Lambda}{51.6\pi^{1/2}\epsilon_0^2 m_e^{1/2}(kT_e)^{2/3}} \tag{2}$$

である。装置のスケールに比べ，平均自由行程（$\nu_{ei} v_e$）が十分長いと衝突は無視できる。

電離平衡状態では，電離度は温度とイオン化エネルギーに依存する。例えば水素の場合には，

$$\mathrm{H}^+ + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{H}^0 + 13.6\ \mathrm{eV}$$

これは，次の Saha の式で表される。

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{n}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2}\frac{g_i g_e}{g_0}\exp\left(-e\epsilon_i/kT\right) \tag{3}$$

ここで x は電離度 $n_i/n = n_i/(n_0+n_i)$，ϵ_i はイオン化エネルギーを表す。

身近なプラズマの例

- **蛍光灯**
  グロー放電の一種で，$n_e \sim 10^{17}\mathrm{m}^{-3}$, $T_e \sim 1\mathrm{eV}$。Ar, Hg 混合気体を放電し，Ar，Hg が一部電子衝突により電離する。この時，Hg が励起され紫外線が発光 (253nm, 185nm) する。

$$\begin{aligned}\mathrm{Hg} + \mathrm{e}^- &\rightarrow \mathrm{Hg}^* + \mathrm{e}^- \\ \mathrm{Hg}^* &\rightarrow \mathrm{Hg} + \mathrm{h}\nu\end{aligned}$$

  紫外線は蛍光体で可視光に変換される。エネルギー変換効率は白熱灯が 10%であるのに対して，蛍光灯では 25%。

- **プロセスプラズマ**
  物理･化学スパッタリングを利用したエッチング（Si や $\mathrm{SiO_2}$ の基板を削ること）では，$n_e = 10^{17} \sim 10^{20}\mathrm{m}^{-3}$, $T_e = 1 \sim 10\mathrm{eV}$。プラズマ中の反応生成物の堆積を利用したプラズマ CVD （基板上に Si，SiC，絶縁物などを堆積させる）もある。

- **核融合プラズマ**
  核融合反応，例えば
  D+T $\rightarrow$ He^4(3.5MeV)+n(14MeV)
  を起こさせてエネルギーを取り出すためには，原子核間のクーロン反発に打ち勝てるぐらいに温度を上げる必要がある。例えば，磁場閉じ込め方式では，$T \geq 10\mathrm{keV}$, $n \geq 10^{20}\mathrm{m}^{-3}$ が必要。

- **プラズマ加速**
  プラズマ中の電子密度の揺らぎ（プラズマ振動）があると電場が生じる。生成される電場の上限は

$$E \sim \frac{mc}{e}\Pi_e \tag{4}$$

  ただし，$\Pi_e = \sqrt{ne^2/m_e\epsilon_0}$ はプラズマ振動。大強度レーザーを用いると $E \sim 10^{12}\mathrm{V/m}$ 程度の電場を生成し，超高エネルギー加速器を作ることができるかもしれない。

2.2 自然界のプラズマ

宇宙の大部分はプラズマである。図２に自然界のプラズマの温度，密度領域を示す。

クーロンポテンシャルと熱エネルギー（運動エネルギー）の比である結合係数は，

$$\Gamma = \frac{(Ze)^2/a}{4\pi\epsilon_0 kT} \tag{5}$$

と表され，$\Gamma > 1$ を強結合プラズマ，$\Gamma < 1$ を弱結合プラズマと呼ぶ。一方，デバイ数 N_D は，デバイ長を半径とする球内の電子数

$$N_D \equiv \frac{4\pi}{3} n \lambda_D^3 \tag{6}$$

で定義され，電荷を遮蔽するために必要な電子の数を表す。このデバイ数は結合係数と

$$\Gamma = \frac{1}{3N_D^{2/3}} \tag{7}$$

の関係をもつ。

Fermi 粒子である電子を空間的に詰め込んでいくと，電子のエネルギーの最大と最小の差はフェルミエネルギー

$$\epsilon_F \equiv (\hbar^2/2m_e)(3\pi^2 n)^{2/3} \tag{8}$$

であらわされる。$\epsilon_F > kT$ を縮退プラズマと呼ぶ。この時，電子のエネルギーの境界は明瞭であるが，温度を上げてい

くと境界があいまいになっていく（Fermi 分布 →Maxwell 分布）。温度が低い場合には電子は Fermi 粒子として振舞い（量子的な効果が大きい），このようなプラズマを縮退プラズマと呼ぶ。

電子間の平均距離 $(3/4\pi n)^{1/3}$ が原子のボーア半径 $4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$ 程度以下になると電子は自由電子として振舞うようになる。これを圧力電離と呼ぶ。

熱平衡状態における黒体輻射の輻射圧は $(4\sigma/3c)(kT)^4$ と表され，プラズマの圧力 nkT よりも大きい場合には輻射圧がプラズマの運動に大きな影響を及ぼす。

身近なプラズマの例

- **太陽**
  太陽の中心は $T = 1.5\mathrm{keV}$, $n = 10^{32}\mathrm{m}^{-3}$。周辺に行くに従って，温度，密度が減少する。太陽ではプラズマの圧力と重力が釣り合っている。核融合反応により生成されたエネルギーは周辺に輸送され，コロナ，太陽風となって噴出す。また，地球磁気圏内に入りこむ。核融合の起こらなくなると，重力に打ち勝ってプラズマを支えることができず，星は崩壊する。

- **電離層**
  太陽からの紫外線は地球大気上層で酸素等を光電離する。その結果 $T_e \sim 0.1\mathrm{eV}$, $n = 10^{11} \sim 10^{12}\mathrm{m}^{-3}$ の電離層が形成される。電離層の密度でのプラズマ振動は短波 (HF 3-30MHz) にあたり，これが反射されることで，地球の裏側への通信が可能となる。

- **HI, HII 領域**
  星を形成する過程で水素プラズマ・ガスは高温・低密度の電離した状態（HII）から低温・高密度の原子 (HI) へと変化（進化）していく。HII は Saha の式で電離度 50%程度の領域にあり，HI での電離度は非常に小さい。

- **銀河団，銀河群**
  銀河の集合である，銀河群，銀河団は $T \sim 1\mathrm{keV}$, $n \leq 10^3\mathrm{m}^{-3}$ のプラズマで満たされていると考えられている。

プラズマの振る舞いは，密度・温度（・磁場）だけでなくシステムの時間的・空間的スケールと上記のようなプラズマの基本スケールの比で異なる。例えば，平衡といっても様々なレベルがある。

2.3 Debye 遮蔽

プラズマ中に Ze の電荷があるときにその周りに生じる電位 ϕ をもとめる。電子は Maxwell 分布

$$n = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \sim n_0\left(1 + \frac{e\phi}{kT_e}\right) \tag{9}$$

に従い，イオン密度は n_0（一定）とすると，Poisson 方程式は，

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{Ze}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}) + \frac{n_0 e}{\epsilon_0}\frac{e\phi}{kT} \\ &= -\frac{Ze}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}) + \frac{\phi}{\lambda_D^2}\end{aligned} \tag{10}$$

となり，これを満たす解は

$$\phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\frac{\exp\left(-r/\lambda_D\right)}{r} \tag{11}$$

となり，スケール λ_D で電位が遮蔽される。

2.4 プラズマ振動

上記と同様に電子の密度変化 n_1 のみを考える。Poisson 方程式，運動方程式，連続の式は

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{en_1}{\epsilon_0}, \quad m_e\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0\nabla \cdot \vec{v} \tag{12}$$

フーリエ成分 $n_1 \exp\left(ikx - \omega t\right)$ がこの解になっているとすると，

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e\epsilon_0} \equiv \Pi_e \tag{13}$$

3 単一粒子の軌道

磁場に垂直な面内では，粒子は Larmor 半径程度に広がりが抑えられる。Larmor 半径がシステムの変化のスケールに比べて十分小さいとき，粒子は磁力線に沿って動くと見なしてよい（案内中心近似）。従って，案内中心（Guidinig Center）がどのように動くか（ドリフトするか）が重要になってくる。

3.1 Larmor 運動（Cyclotron 運動）

電場，磁場中の粒子の運動方程式は

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{14}$$

$E = 0$, B:一様の条件でこれを解くと

$$\begin{aligned}v_x &= -v_\perp \sin\left(\Omega t + \delta\right) \\ v_y &= v_\perp \cos\left(\Omega t + \delta\right) \\ v_z &= v_{z0}\end{aligned} \tag{15}$$

となり，半径 ρ の螺旋軌道を描く。ただし，

$$\Omega = -\frac{qB}{m}, \quad \rho = \left|\frac{mv_\perp}{qB}\right| \tag{16}$$

また，回転方向は，電荷に依存し磁場をうち消す向き（反磁性）である。ここで定義する Ω は正イオンでは負，電子では正となることに注意。

3.2 各種のドリフト

- **$E \times B$ ドリフト**
  一様な磁場 $\vec{B}$ に垂直に一様な電場 $\vec{E}$ がかかっているときを考える。

$$\vec{v} = \vec{u}_E + \vec{u}\ , \quad \vec{u}_E \equiv \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \tag{17}$$

  として，Eq.(14) に代入すると

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = q\vec{u} \times \vec{B} \tag{18}$$

  が成立し，粒子軌道は螺旋運動と $E \times B$ ドリフト $\vec{u}_E$ の重ね合わせとなる。

  より一般的な力 $m\vec{g}$ の場合には

$$\vec{u}_g = \frac{m\vec{g} \times \vec{B}}{qB^2} = -\frac{\vec{g} \times \vec{B}}{\Omega B} \tag{19}$$

- **曲率ドリフト**
  磁場が曲率半径 R を持つとき，磁場に沿って $v_\parallel$ の速さを持つ粒子は遠心力

$$\frac{m{v_\parallel}^2}{R}\vec{n} \tag{20}$$

  を受ける。これによる曲率ドリフトは

$$\vec{u}_{curv} = \frac{\vec{B} \times \frac{{v_\parallel}^2}{R}\vec{n}}{\Omega B} \tag{21}$$

- **∇B ドリフト**
  磁場に垂直方向に不均一な磁場 ($\nabla B \perp B$) があるときを考える。Larmor 半径に比べてゆっくり磁場が変化する場合には，$\vec{B} \sim \vec{B}_0 + (\vec{\rho} \cdot \nabla)\vec{B}$ とし，新たな力 $\vec{v} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla)\vec{B}$ によるドリフトを考えればよい。ただし，$\vec{v}, \vec{\rho}$ は下に示す一様磁場 $\vec{B}_0$ 中のサイクロトロン運動で近似する。

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= (\rho\cos\Omega t, \rho\sin\Omega t, 0) \\ \vec{v} &= (-\rho\Omega\sin\Omega t, \rho\Omega\cos\Omega t, 0) \end{aligned} \tag{22}$$

  $B_z \neq 0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} \neq 0$ とすると，

$$\vec{v} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla)\vec{B} = \frac{\rho^2\Omega}{2}\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e}_x \quad \left(= \frac{v_\perp^2}{2\Omega}\nabla B \right) \tag{23}$$

  この力による ∇B ドリフトは

$$\vec{u}_{\nabla B} = \frac{\frac{v_\perp^2}{2}\nabla B \times \vec{B}}{\Omega B^2} \tag{24}$$

  考えている領域で電流が無視できるとき（$j \approx 0$），

$$\nabla B \sim (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{B} = \vec{b}(\vec{b} \cdot \nabla)B + B(\vec{b} \cdot \nabla)\vec{b} = \frac{\partial B}{\partial l}\vec{b} - \frac{B}{R}\vec{n} \tag{25}$$

  ただし，$\vec{b} = \vec{B}/B$。これを用いると ∇B ドリフトは

$$\vec{u}_{\nabla B} = \frac{\vec{B} \times \frac{v_\perp^2/2}{R}\vec{n}}{\Omega B} \tag{26}$$

  曲率ドリフトと併せて表現すると

$$\frac{\vec{B} \times \frac{v_\perp^2/2 + v_\parallel^2}{R}\vec{n}}{\Omega B} \tag{27}$$

3.3 ミラー磁場と断熱不変量

磁力線に沿って，磁場の強い点があると，弱い磁場から走ってきた粒子は，磁場の強い点の近傍で跳ね返される。これをミラー磁場という。実験室プラズマに用いられるだけでなく，地磁気圏（双極子磁場）の部分もミラー磁場を構成する。

3.3.1 磁気モーメント

周期運動するときに，その周期に比べて場（パラメータ）がゆっくり変化するとき，位相空間での軌道の面積 $\oint pdq$ は保存される。これを断熱不変量という。サイクロトロン運動における磁気モーメント μ は断熱不変量であり，

$$\begin{aligned} \mu &= IS = \frac{q\Omega}{2\pi}\pi\rho^2 = \frac{mv_\perp^2/2}{B} \\ &= \frac{q}{4\pi m}\oint pdq = const. \end{aligned} \tag{28}$$

と表される。

3.3.2 ミラー磁場による閉じ込め

両端で磁場が強いミラー磁場内での粒子の運動を考える。電場が 0 であるとエネルギー保存

$$v_\parallel^2 + v_\perp^2 = const. \tag{29}$$

が成立する。ミラー磁場の最小値，最大値を B_0, B_1，そのときの速さを $v_{\parallel 0}, v_{\perp 0}, v_{\parallel 1}, v_{\perp 1}$，とすると式 (28,29) から

$$\begin{aligned} 0 \quad &< \quad v_{\parallel 1}^2 = v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2 - v_{\perp 1}^2 = v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2\left(1 - \frac{B_1}{B_0}\right) \\ &\rightarrow \quad \frac{v_0^2}{v_{\perp 0}^2} > \frac{B_1}{B_0} \end{aligned} \tag{30}$$

となる。逆に

$$\frac{v_0^2}{v_{\perp 0}^2} < \frac{B_1}{B_0} \tag{31}$$

の粒子は B_1 まで到達できず，B_0 を含む磁場の弱い領域に閉じ込められる。すなわち，十分強い磁場 B_1 を持つミラー磁場を用いることによりプラズマをほぼ閉じ込めることができる。

ミラー磁場中の粒子が磁力線方向に受ける力は

$$q\vec{v} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla)\vec{B} = -\mu \frac{\partial B}{\partial l} \tag{32}$$

となり，磁場の弱い方向へ復元力を受け振動することがわかる。

3.3.3 フェルミ加速

ミラー磁場内に閉じ込められた粒子の振動運動を周期運動と考えると（縦の）断熱不変量

$$\oint mv_{\parallel} dl \sim mv_{\parallel} l \tag{33}$$

が保存される。ミラー磁場の両端がゆっくり近づくと $v_{\parallel}$ が増加しすると予想される。これをフェルミ加速と呼び，宇宙線の加速機構の一つと考えられている。

3.4 種々の磁場配位と粒子軌道

高温プラズマを生成し，ある領域に閉じ込めておくためには，粒子の軌道がその領域内で閉じていなければならない。磁場があると磁力線に垂直方向にはラーマ半径の大きさに閉じ込めることが可能である。

磁力線方向に閉じ込めるためには，ミラー磁場が有用である。粒子の電荷の符号が決まっていれば磁場方向の復元力（式 (32)）のかわりに電場 $E_{\parallel}$ を用いることが可能である。この方式を Penning Trap と呼ぶ。これが有効であるためには，デバイ長 λ_D が十分長く電場が遮蔽されないことが必要であり，非中性プラズマ，あるいは少数荷電粒子の閉じ込めに用いられる。

次節以降では，磁力線自身が閉じる場合を考える。

3.4.1 磁気面と対称性

磁力線の方向 (dx, dy, dz) は

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \tag{34}$$

で表される。磁力線群が面をなすとき，これを磁気面という。あるスカラー関数 $\Psi(\vec{r})$ が $\nabla\Psi \cdot \vec{B} = 0$ を満たすとき，磁気面上で $\Psi = const.$ となる。すなわち，Ψ で磁気面を表すことができる。

円柱座標では，磁場は $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ より，

$$\begin{aligned}
B_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\
B_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\
B_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{35}$$

したがって，場が z に依存せず，移動対称性を持つとき $A_z(r,\theta) = const.$ は磁気面を表す。また，場が θ に依存せず，軸対称性を持つとき $rA_\theta(r,z) = const.$ は磁気面を表す。

3.4.2 線電流磁場

無限に長い線電流 I の作るが半径 r の位置に作る $\vec{A}$, $\vec{B}$ は

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r\ , \quad B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{36}$$

従って，$r = const.$ は磁気面を表す。

3.4.3 単純トーラス磁場

電流 I 円形コイルを並べたソレノイドはアンペールの法則 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$ により

$$B = \mu_0 I n \tag{37}$$

の磁場を作る。ただし，n は単位長さ当たりのコイル数。このコイルを環状（トーラス状）に並べると閉じた環状の磁力線群を作ることができる。トーラスの中心からの半径を R とすると，磁場は

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{38}$$

ただし，I は総電流。この磁場は $1/R$ の非一様性をもつので，粒子はドリフト $\vec{u}_{\nabla B}, \vec{u}_{curv}$ をして，上下（トーラスの軸方向）に移動する。このドリフトは電荷の符号に依存するので，プラズマは上下方向に荷電分離を起こし電場が生成される。この電場により粒子は $E \times B$ ドリフトを起こす。このドリフトは外向きで電荷の符号に依存しない。従ってプラズマ全体として外向きに移動しコイルなどにあたって消滅する。

3.4.4 双極子磁場

電流 I 半径 a の円環電流が (r, z) に作るベクトルポテンシャル A は

$$\begin{aligned}
A_\theta &= \frac{\mu_0}{\pi k} I \sqrt{\frac{a}{r}} \left((1 - k^2/2)K(k) - E(k)\right) \\
k^2 &\equiv \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}
\end{aligned} \tag{39}$$

ただし，$K(k)$, $E(k)$ は第１種，第２種完全楕円積分。軸対称なので $rA_\theta = const.$ は磁気面を表す。円環電流のご

く近傍では，線電流の作る磁気面 $(r-a)^2+z^2=const.$ に漸近し，遠方 ($k \ll 1$) では，双極子 $I\pi a^2$ の磁気面

$$rA_\theta \sim \frac{\mu_0 I a^2}{4}\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \tag{40}$$

に漸近する。この時磁場は r^{-3} または z^{-3} で小さくなる。

地磁気は双極子磁場の例である。この磁場中で粒子は北極，南極を結ぶミラー磁場内で往復運動するとともに，東西にドリフト（$\vec{u}_{\nabla B}, \vec{u}_{curv}$）する。

円環電流の近傍では，電流を取り巻く磁気面が存在し，軸方向に磁場を加えると様々な形の磁気面が構成される。

3.4.5　トーラス磁場

単純トーラスの真中に円環電流，軸方向磁場が存在する場合を考える。この系は軸対称であるので，rA_θ が磁気面を表す。代表的な磁場閉じ込め装置であるトカマク（tokamak）では，プラズマ自身が円環電流を持つ。磁力線は円環（磁気軸）の周りをまわると共に θ 方向（トロイダル方向）にまわる。これらの磁場を B_Φ, B_p と記す。粒子軌道は磁力線 (B_ϕ, B_p) に沿う運動と不均一磁場 $(B_\phi \propto 1/R)$ によるドリフト $\vec{u}_{\nabla B}, \vec{u}_{curv}$ で近似できる。ここでは，磁気面が磁気軸を取り囲む同心円であり，磁気軸近傍の粒子軌道を考える。

- 非捕捉粒子
  磁気軸の周りの運動回転を ω とすると運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -\omega z\\ \frac{dz}{dt} &= \omega r + v_d\end{aligned}$$

$$v_d = \frac{m}{qB_0R}\left(\frac{v_\perp^2}{2}+v_\parallel^2\right) \tag{41}$$

  となる。ただし，R, B_0 は磁気軸の半径とそこでのトロイダル磁場を表す。磁気軸近傍を考えると，$v_d = const.$, $\omega = const.$ と近似でき，粒子軌道は磁気面から内側または外側にシフトした円

$$(r+v_d/\omega)^2+z^2=const. \tag{42}$$

  を描く。シフトの向きは ω の符号に依存する。

- 捕捉粒子
  円軌道の半径を a とすると円の内外でのトロイダル磁場の変化は $\Delta B/B_0 \sim a/R$ となるので，粒子は内側に行くに従って強い磁場を感じる。このミラー配位により，平行方向の速さの遅い粒子は磁場の弱い外側に捕捉される。式 (31) からその条件は

$$\frac{v_\parallel^2}{v_\perp^2} < \frac{a}{R} \tag{43}$$

  となる。この軌道は形からバナナ軌道と呼ばれる。

4　衝突と拡散

単一粒子の軌道は磁力線と磁力線に垂直なドリフトで決まる。実際のプラズマは粒子の集合であり，粒子間の衝突が起きる。ここでは，衝突時間がどのように表されるかを直感的に導く（厳密な取り扱いはしない）。衝突が引き起こす現象として，プラズマの電気抵抗を示す。衝突が起きると，粒子は単一粒子軌道からずれて，拡散を引き起こす。拡散のスケールについて学ぶ。

4.1　衝突時間

プラズマ中の衝突はクーロン散乱とも呼ばれる。最初に電子がイオンと衝突する場合を考える。イオンが静止しているとして，衝突が起きるためには，電子がイオンに十分近づかなければならない（この距離を r_0 とする）。この時，電子の持つ運動エネルギーとクーロンポテンシャルは同程度となり

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_e v_e^2 &\sim \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}\\ &\to \quad r_0 \sim \frac{Ze^2}{\epsilon_0 m_e v_e^2}\end{aligned} \tag{44}$$

従って衝突断面積は

$$\sigma = \pi r_0^2 \sim \frac{Z^2e^4}{\epsilon_0^2 m_e^2 v_e^4} \tag{45}$$

となり，衝突時間 τ_{ei} は,

$$\tau_{ei} = \frac{1}{n\sigma v_e} \sim \frac{\epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3}{nZ^2e^4} \sim \frac{\epsilon_0^2\sqrt{m_e}(kT_e)^{3/2}}{nZ^2e^4} \tag{46}$$

同様に考えるとイオン-イオンの衝突時間は

$$\tau_{ii} =\sim \frac{\epsilon_0^2 m_i^2 v_i^3}{nZ^4e^4} \sim \frac{\epsilon_0^2\sqrt{m_i}(kT_i)^{3/2}}{nZ^4e^4} \tag{47}$$

イオン-電子の衝突では，質量が重いのでイオンはほとんど散乱されない。衝突時間は

$$\tau_{ie} \sim \tau_{ei}\frac{m_i}{m_e} \tag{48}$$

となる。これらの衝突時間の比は

$$\tau_{ei} : \tau_{ii} : \tau_{ie} = 1 : \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} : \frac{m_i}{m_e} \tag{49}$$

となる。

4.2　電気抵抗

電流は主として電子が担う。衝突時間 τ_{ei} の間に電子が電場 E で加速されて得る速度は

$$\begin{aligned}m_e v_e &= -eE\tau_{ei}\\ \to \quad v_e &= -\frac{eE}{m_e}\tau_{ei}\end{aligned} \tag{50}$$

一方抵抗率の定義 $E = \eta j = -\eta e n v_e$ より，抵抗率は

$$\eta \sim \frac{m_e}{ne^2\tau_{ei}} \tag{51}$$

式 (46) を代入すると

$$\eta \sim \frac{Z^2e^3}{\epsilon_0^2 m_e v_e^3} \tag{52}$$

となる。厳密には,

$$\eta \sim \frac{Ze^2 \ln\Lambda}{51.6\sqrt{\pi}\epsilon_0^2 m_e v_e^3} \tag{53}$$

4.3　拡散方程式と random walk

粒子束 Γ が密度勾配 ∇n に比例し

$$\vec{\Gamma} = -D\nabla n \tag{54}$$

と書けるとき，D を拡散係数と呼ぶ。

- 拡散方程式とその解
  粒子の拡散を考える。
  $n(x,t)dx$：時刻 t での $x \sim x + dx$ にある粒子数とする。拡散方程式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \tag{55}$$

この方程式の解の一つは

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{56}$$

item １次元ランダムウォークの確率
空間・時間を離散的にとり，確率を考える。
$W(l,n)$：n ステップ後に l の位置に来る確率は,

$$W(l,n) = {}_nC_{\frac{n+l}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{57}$$

$$= \frac{n!}{((n+l)/2)!\,((n-l)/2)!} \tag{58}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\exp\left(-\frac{l^2}{2n}\right) \quad (n \gg |l| \gg 1) \tag{59}$$

- ランダムウォークの連続化空間・時間の連続化

$$x = la, \quad t = n\tau \tag{60}$$

とすると，確率は

$$W(l,n)\Delta x = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)\Delta x \tag{61}$$

ただし

$$D = \frac{a^2}{2\tau} \quad = \frac{[L]^2}{[T]} \tag{62}$$

4.4　拡散係数と閉じ込め時間

プラズマは衝突により拡散し，元の軌道からずれていく。従って，装置の大きさ a が与えられると，プラズマが拡散し，装置の壁にあたって消滅する時間（閉じ込め時間 τ_p）が決まる。Sec.4.3 から拡散係数 D は衝突時のステップ幅 Δx と衝突時間 Δt から $D = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$ で評価される。Random Walk において距離 a にまで広がる時間は $a \sim \sqrt{2D\tau_p}$ で与えられるので，閉じ込め時間は

$$\tau_p \sim \frac{a^2}{2D} \sim \frac{a^2}{\Delta x^2}\Delta t \tag{63}$$

となり，装置サイズ/ステップ幅の比の自乗に衝突時間をかけたものとなる。すなわち，装置サイズが大きいほど，衝突時間が長いほど閉じ込め時間は長くなる。

- プラズマ中の拡散
  磁場がないときまたは磁力線に沿う拡散を考える。例えば，Q-machine と呼ばれる $T_i = 0.2eV$，$n_i = 10^{17}\mathrm{m}^{-3}$ のプラズマでの閉じ込め時間を評価する。イオンイオンの平均自由行程，衝突時間は

$$\lambda_{ii} = 1\times10^{-4}T_i^2/n_i \sim 4[\mathrm{mm}]$$
$$1/\nu_{ii} = \left(0.2\times10^9 Z^4/\sqrt{A}T_i^{-2/3}n_i\right)^{-1} \sim 0.5[\mu\mathrm{s}]$$

装置の磁力線方向の長さが $a = 1\mathrm{m}$ であるとすると，閉じ込め時間は,

$$\tau_p \sim \frac{a^2}{\Delta x^2}\Delta t \sim 30[\mathrm{ms}] \tag{64}$$

となる。この閉じ込め時間は，$\tau_p \propto n_i T_i^{-5/2}$ と温度の急激な減少関数になっているため，高温のプラズマでは，磁力線（あるいは粒子軌道）を閉じさせなければ，閉じ込めが難しくなる。また，閉じ込め時間が短くても，プラズマ生成量（スピード）が十分大きければ，プラズマを定常的に維持できる。

- 磁力線に垂直な閉じ込め
  高温のプラズマでは，磁力線（及び粒子軌道）を閉じさせることにより，よい閉じ込めを実現している。しかしながら，衝突により，磁力線に垂直方向には拡散していく。衝突には，イオン-イオン，電子-電子，イオン-電子が考えられるが，このうち前２者では，衝突前後で，２つの粒子の案内中心の重心は移動しない。ところが，イオン-電子の衝突では，電子のラーマ半径 ρ_e 程度重心がずれる。その結果生じる拡散係数は,

$$D = \frac{\rho_e^2}{\tau_{ei}} \propto \frac{n}{B^2\sqrt{kT}} \tag{65}$$

従って，温度が上がると，衝突頻度が小さくなり，拡散係数は小さくなる。また，磁場が強ければラーマ半径が小さくなり，拡散係数は小さくなる。

実際には，温度が上がるとプラズマの不安定性に起因する拡散（輸送）が激しくなり，必ずしも上式のようにはならない。

- バナナ軌道による拡散
トーラス磁場において，衝突頻度が小さいと，粒子はバナナ軌道を描く。このような状況では，１回の衝突で，バナナ軌道は，バナナの幅程度移動する。この時の拡散係数は，式 (65) の ρ_e をバナナの幅に置き換えたもの $\times factor$ となる。

バナナの幅 Δ は，式 (42) から
$$\Delta \sim \frac{v_d}{\omega} \sim \frac{mv^2}{eBR}\frac{1}{\omega} \tag{66}$$
また磁気軸からバナナ軌道までの半径を a とすると ω は磁力線の傾きと a と磁力線方向の速さで決まる。トーラスのトロイダル方向に $2\pi Rq$ だけ進んだときにポロイダル方向に１周するとして無次元数 q を定義すると
$$\omega \sim \frac{v}{Rq} \tag{67}$$
となる。これを用いるとバナナの幅は
$$\Delta \sim \frac{mv^2}{eBR}\frac{Rq}{v} \sim \frac{m}{eB}vq \sim \rho q \tag{68}$$
従って，バナナ軌道による拡散係数は磁力線に垂直な拡散係数に比べて無次元数 q^2 だけ大きくなる。

5 電磁流体としてのプラズマ

粒子系の扱い方には，３通りが考えられる。

- 全粒子
N 個の粒子がある場合に，それぞれの座標，運動量を 6N 次元の位相空間で表現する。解析的には，このような取扱いは，あまり行われない。しかしながら，粒子シミュレーションでは，このようにする。

- Boltzmann 方程式
座標と速度の分布関数 $f(\vec{x},\vec{v},t)$ として，粒子系を表現し，その時間発展を
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla f + \frac{q}{m}(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\cdot\nabla_v f = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c \tag{69}$$
表す Boltzmann 方程式を解く。

- 流体方程式
速度の情報を積分して落とす。
密度は $n(\vec{x}) = \int f d\vec{v}$,
速度の１次のモーメントは $nm\vec{v} = \int m\vec{v}d\vec{v}$,
速度の２次のモーメントは $\frac{3}{2}nkT = \int mv^2/2d\vec{v}$,
のようにして取り扱う。すなわち，速度の３次以上のモーメントは無視する。

ここでは，プラズマを流体として扱う電磁流体方程式を導く。

5.1 電磁流体方程式

最初にイオンと電子を別々に扱う。連続の式は
$$\begin{aligned}\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla\cdot(n_e v_e) = 0\\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla\cdot(n_i v_i) = 0\end{aligned} \tag{70}$$
運動方程式は
$$\begin{aligned}n_e m_e\left(\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e\cdot\nabla)\vec{v}_e\right)\\ = -\nabla p_e - en_e(\vec{E}+\vec{v}_e\times\vec{B}) + \vec{R}\end{aligned} \tag{71}$$
$$\begin{aligned}n_i m_i\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i\cdot\nabla)\vec{v}_i\right)\\ = -\nabla p_i + Zen_i(\vec{E}+\vec{v}_i\times\vec{B}) - \vec{R}\end{aligned} \tag{72}$$
ただし，$R = en_e\eta\vec{j}$ はイオン-電子間の衝突を表す。次に１流体での量を考える。１流体として考えた時質量で平均した密度，速度は
$$\begin{aligned}\rho_m &= n_e m_e + n_i m_i\\ \vec{v} &= \frac{1}{\rho_m}(n_e m_e\vec{v}_e + n_i m_i\vec{v}_i)\end{aligned} \tag{73}$$
また，電荷で平均した電荷密度，電流密度は
$$\begin{aligned}\rho &= -en_e + Zen_i\\ \vec{j} &= -en_e\vec{v}_e + Zen_i\vec{v}_i\end{aligned} \tag{74}$$
２流体の式 (70, 71,72) から１流体でも同様の式
$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_m\vec{v}) = 0\\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0\\ &\rho_m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + n_e m_e(\vec{v}_e\cdot\nabla)\vec{v}_e + n_i m_i(\vec{v}_i\cdot\nabla)\vec{v}_i\\ &\quad = -\nabla p + \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}\end{aligned} \tag{75}$$
が成立する。イオンの方が質量が重いので，プラズマ中の運動量はほぼイオンが担う。すなわち $\vec{v} \sim \vec{v}_i$。反対に電子の方が速いので，プラズマ中の電流はほぼ電子が担う。また，準中性条件 $en_e \sim Zen_i$ を用いると $\vec{j} \sim -en_e(\vec{v}_e - \vec{v}_i) \sim -en_e(\vec{v}_e - \vec{v})$。これから，電子の速度は $\vec{v}_e = \vec{v} - \vec{j}/en_e$

式 (71) において電子の慣性（電子の質量）を無視できるとすると（電子サイクロトロン周波数よりもゆっくりした現象を扱うという仮定に相当する）
$$\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} - \frac{\vec{j}}{en_e}\times\vec{B} + \frac{\nabla p_e}{en_e} - \frac{\vec{R}}{en_e} = 0 \tag{76}$$

さらに，準中性条件 $\rho \ll en_e$，イオンサイクロトロン周波数よりもゆっくりした現象を扱うとすると

$$\frac{\vec{j}}{en_e} \times \vec{B} - \frac{\nabla p_e}{en_e} = \rho_m \frac{Dv}{Dt} + \frac{\nabla p_i}{en_e} - \rho \vec{E} \ll \vec{v} \times \vec{B}$$

となる。この時電子の運動方程式 (76) は

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \tag{77}$$

これは，電流と電場の関係を表し，Ohm の式と呼ばれる。$\vec{v} \times \vec{B}$ は動いている系からみた誘導電場を表していることに注意。

5.2 MHD 方程式

これまでの電磁流体方程式（Magnetohydrodynami Equation）を整理すると

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \tag{78}$$

$$\rho_m \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} \tag{79}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{80}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{81}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{82}$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) \tag{83}$$

この方程式は，ゆっくりとした変動しか取り扱えない，プラズマ振動のように中性からのずれが本質的な現象，を扱うことができない。

MHD 方程式の特徴的な速さのスケールを求めるために，式 (79,80) の次元解析を行うとアルフベン速度

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho_m}} \tag{84}$$

が得られる。これは，後述する（磁気）音波の速度を表す。

5.3 抵抗の役割

式 (78,79) から

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B} \tag{85}$$

これは，磁場の拡散方程式であり，$\frac{\eta}{\mu_0}$ は拡散係数を表す。閉じ込め時間と拡散係数の関係と同様に考えると磁場の拡散時間は，系のスケールを a として

$$\tau_\eta = \frac{a^2 \mu_0}{\eta} \tag{86}$$

となる。これは，電流のしみこみ時間とも呼ぶ。

また，Navier-Stockes 方程式

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} \tag{87}$$

との類似性を考えると，$\frac{\eta}{\mu_0}$ は粘性を表し，磁気 Reynolds 数 R

$$\frac{\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})}{\eta/\mu_0 \ \nabla^2 \vec{B}} \sim \frac{vB/a}{\eta/\mu_0 \ B/a^2} \sim \frac{\mu_0 va}{\eta} \equiv R \tag{88}$$

を定義することが出来る。磁気レイノルズ数は，式 (85) において，右辺第 1 項と第 2 項の比を表す。また，磁場の拡散時間とアルフベン速度できまるアルフベン通過時間の比

$$R = \frac{\mu_0 va}{\eta} = \frac{\mu_0 a^2}{\eta} \frac{v}{a} = \frac{\tau_\eta}{a/v_A} \tag{89}$$

を表している。

ある閉曲面 dS を通過する磁束 Φ が $\eta \to 0$ で変化しないことを示す。磁束の変化は磁場が時間変化する分と閉曲面の移動による分がある。,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot dS + \oint \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{s}) \tag{90}$$

さらにベクトル公式，式 (78) を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= -\int \nabla \times \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot dS \\ &= -\int \nabla \times \eta \vec{j} \cdot dS = \int \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \vec{B} \cdot dS \end{aligned} \tag{91}$$

したがって，$\eta \to 0$ で $\Phi = const.$ となり，磁束（磁力線）はプラズマに凍りついていることがわかる。

5.4 MHD 発電，MHD 加速

Ohm の法則，運動方程式では，速度と電場，電流と力が関係付けられている。このことを利用して，発電とその逆の加速が可能である。

- MHD 発電
  高温燃焼ガス (2400°C 以上) に電離しやすい物質を入れて導電性を持たせる。運動する燃焼ガスに垂直に磁場をかけると Ohm の法則により誘導電場 ($\vec{v} \times \vec{B}$) が生じる。この電場を用いて発電させることを MHD 発電といい，研究開発がされている。流れる電流 $\vec{j}$ による力 $\vec{j} \times \vec{B}$ は $\vec{v}$ と逆向きで，減速する向きであることに注意。

- MHD 加速
  発電とは逆に，電気エネルギーを用いて電磁流体を加速することが可能である。式 (79) から，電磁流体に電流を流すと $\vec{j} \times \vec{B}$ の力が流体にはたらく。同軸

ガンでは，同軸の内と外で放電したときにできる径方向電流 $\vec{j}_r$ と周方向磁場 B_θ により，軸方向の力が生まれ，プラズマは軸方向に加速されて飛んでいく。このような仕組みのロケットエンジンの開発がされている

6　平衡と安定性

状態の時間発展を考えると非平衡 → 平衡 → 安定の 3 段階を考えることができる。プラズマ物理では，力学的に釣り合いがとれている状態を平衡状態と呼ぶことが多い。平衡状態でも，微少な摂動に対して安定である場合と不安定である場合が考えられる。ここでは，最初に平衡状態を考え，次に安定性，不安定性を考える。

MHD 方程式 (79) で，定常状態を考えると

$$\nabla p = \vec{v} \times \vec{B} \tag{92}$$

従って，$\vec{B} \cdot \nabla p = 0, \vec{j} \cdot \nabla p = 0$ となり，圧力勾配は磁場，電流に垂直になる。すなわち，圧力一定の面は磁気面と一致する。Maxwell 方程式 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ より，

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left((\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} - \nabla \frac{B^2}{2}\right) \tag{93}$$

整理すると

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B}{\partial l}\vec{B} - \frac{B^2}{R}\vec{n}\right) \tag{94}$$

この式で右辺が左辺に比べて無視できる時（例えばトロイダルプラズマで大半径 ≫ 小半径），

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} \sim const. \tag{95}$$

これは，磁場の強いところで圧力が低くなり，磁場の弱いところで圧力が高くなることをしめす。すなわち，ある場所に圧力の高いプラズマを維持するためにはその周りの磁場を強くしてやればいいことがわかる。

6.1　円柱プラズマの平衡

半径 a の円柱状プラズマで，z，θ 方向に対称性があるとき，式 (94) は

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(p + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0}\right) = -\frac{B_\theta^2}{r\mu_0} \tag{96}$$

この式に r^2/a^2 をかけて積分をする。また左辺を部分積分すると，

$$\left[p + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a} - \left\langle p + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0}\right\rangle = \left\langle \frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right\rangle \tag{97}$$

整理すると，

$$\left[\frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a} = \langle p \rangle + \frac{\langle B_z^2 \rangle}{2\mu_0} \tag{98}$$

ここで，プラズマの圧力と磁場の圧力の比を

$$\beta \equiv \frac{\langle p \rangle}{\left[\frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}}, \quad \beta_p \equiv \frac{\langle p \rangle}{\left[\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}} \tag{99}$$

で表す。

B_z の大きさを比べて常磁性，反磁性と分類することがある。

- 常磁性：$\langle B_z^2 \rangle > B_z^2|_{r=a}$：$\beta_p < 1$
- 反磁性：$\langle B_z^2 \rangle < B_z^2|_{r=a}$：$\beta_p > 1$

反磁性は，各粒子のサイクロトロン運動の結果である。常磁性は，磁力線方向に電流が流れようとする効果からくる。

6.2　不安定性の分類

不安定性には様々なものがあるが，異なる観点から分類することができる。ここでは，MHD 流体としてプラズマを見たときの MHD 不安定性をとりあげる。MHD 不安定性以外としては，速度空間で振る舞いが重要になるものがある。

不安定化の原因となる駆動力から分類すると

•圧力勾配

•電流勾配

これらの勾配があるとプラズマは均一になろうとして不安定性を引き起こす。逆にプラズマを安定化する力は

•磁力線の張力

•磁場の圧縮

•磁場の良い勾配

である。

プラズマの抵抗を無視できると磁力線はプラズマと伴に移動する。抵抗がある場合には磁力線のつなぎ変えが起き，磁場配位は変化する。抵抗の影響の有無で分類すると

•理想モード

•抵抗性モード

また，不安定性の解析方法として

•フーリエ成分の成長率を求める方法

•エネルギー原理

がある。いづれも微小摂動を考える。その摂動が成長するか否かを調べるのが前者。摂動によるエネルギー増減の符号を見るのが後者である。

6.3 不安定性の直感的な説明

ここでは，交換不安定性，ソーセージ不安定性，キンク不安定性を紹介する。

- 交換不安定性
  プラズマと外部（真空）との境界面で，境界と垂直に力 $\vec{g}$ が加わっているとする。この境界面が磁場と垂直に波打っているときの波の振幅の成長を考える。イオンと電子の $\vec{g}$ によるドリフトの向きは逆であるため，波うっている斜面に正負の電荷がたまる。この電荷により電場が生ずる。電場による $\vec{E}\times\vec{B}$ ドリフトはイオンも電子も同じ向きである。$\vec{g}$ がプラズマの広がる向きであれば波の振幅は $\vec{E}\times\vec{B}$ により成長する。

  この不安定性は磁場のよい勾配で安定化される。すなわち，磁場の圧力勾配が $\vec{g}$ と逆向きであればよい。

- ソーセージ不安定性
  電流が円柱状に流れているとき，電流は磁場 (B_θ) を作る 円柱の半径がある部分で小さくなり 円柱がくびれるとこの部分の磁場が大きくなる。その結果，磁場の圧力が高くなり，プラズマは径方向に圧縮される。圧縮されるとさらに B_θ 磁場が強くなる。

  一方，縦方向の磁場 B_z があると，この圧縮により B_z は強められ安定化に寄与する。また，くびれにより縦方向磁場 B_z が曲げられるのでこれも安定化に寄与する。

- キンク不安定性
  電流が円柱状に流れているとき，電流は磁場 (B_θ) を作る 円柱が全体として（z 方向に）波うつ場合を考える。円柱が曲がっている部分の内側では B_θ が強くなり，外側では弱くなる。磁場の圧力を考えると，円柱の波うち（変形）は成長する。

  縦磁場があると，変形により磁力線が曲げられるので，これは安定化に寄与する。磁力線の向きと波うちによる変形が同じ（ピッチ）であると局所的には磁力線の変形が起こらないので，不安定になりやすい。

上記のうち交換不安定性は圧力勾配によって駆動される。また，ソーセージ不安定性，キンク不安定性は電流（勾配）によって駆動される。いづれの場合も微小変化を仮定して，その変化が成長する場合は不安定で，逆に減衰する場合は安定である。

6.4 交換不安定性の成長率の導出

不安定性の解析手法である成長率の評価を交換不安定性を例に取って説明する。

プラズマが $x<0$ 真空が $x>0$ に存在し $\vec{g}$ の力が x 正にかかっているとする。一様な磁場 B_0 が z 正向きにかかっていて，z 方向には移動対称性があるとする。平衡状態（$\partial/\partial t=0$）での値を B_0, v_0, n_0 とする。このとき，x 方向に境界が波打つ微小摂動の成長率を求める。この摂動による１次の項を v_1, E とし，これらが，$\propto e^{i(ky-\omega t)}$ のフーリエ成分であるとする。

イオンの運動方程式 (72) は平衡状態では

$$0 = en_0(v_0\times B_0)+m_in_0\vec{g} \tag{100}$$

となり，これからイオンは y 負向きにドリフト

$$v_0=\frac{m_i}{e}\frac{\vec{g}\times B}{B^2}=\frac{g}{\Omega_i}\vec{e_y}\ ,\qquad \left(\Omega_i=-\frac{eB_0}{m_i}<0\right) \tag{101}$$

をする。z 方向には力を受けず，慣性運動をする。イオンの運動方程式において微小摂動がある時の１次の項のみを考えると

$$(\omega-kv_0)\vec{v}_1=\frac{ie}{m_i}(\vec{E}+\vec{v}_1\times\vec{B}_0) \tag{102}$$

$E_x=0$, $|\Omega_i|\gg|\omega-kv_0|$ の時にこれを $\vec{v}$ の成分 v_{ix}, v_{iy} について解くと

$$\begin{aligned} v_{ix} &= \frac{E_y}{B_0} \\ v_{ix} &= i\frac{(\omega-kv_0)}{\Omega_i}\frac{E_y}{B_0} \end{aligned} \tag{103}$$

一方，イオンの連続の式から

$$-i\omega n_1+ikn_0v_{ix}+ikv_0n_1+v_{ix}\frac{\partial n_0}{\partial x}=0 \tag{104}$$

この式に Eq.(103) を代入すると

$$(\omega-kv_0)n_1+i\frac{E_y}{B_0}\frac{\partial n_0}{\partial x}-ikn_0\frac{\omega-kv_0}{\Omega_i}\frac{E_y}{B_0} \tag{105}$$

電子の運動方程式も同様に解けるが，$\Omega_e\gg|\Omega_i|$ であるので $v_{e0}\ll v_0$, $v_{ey}\ll v_{ex}$，すなわち，$v_{e0}\sim 0$, $v_{ey}\sim 0$ とすると，イオンの式 (105) に対応する電子の式は

$$\frac{E_y}{B_0}=i\omega n_1\left(\frac{\partial n_0}{\partial x}\right)^{-1} \tag{106}$$

とおける。これを式 (105) に代入し，さらに式 (101) を用いると

$$\omega^2-kv_0\omega-\frac{g}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x}=0 \tag{107}$$

得られた分散式を解くと

$$\omega=\frac{kv_0}{2}\pm\sqrt{\frac{k^2v_0^2}{4}+\frac{g}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x}} \tag{108}$$

であり，

$$-\frac{g}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x}>\frac{k^2v_0^2}{4}$$

であれば，複素数の解が存在し，不安定になる。この時，$\vec{g}$ と ∇n_0 は逆向きでなければならない。また成長率は

$$\mathrm{Im}(\omega) \sim \sqrt{-\frac{g}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x}}$$

となる。

7 プラズマ中の波

7.1 波動の分類

プラズマでは，遠距離相互作用である電場，磁場があること，抵抗，粘性などの散逸が小さいことから Coherent な摂動である波動が存在しやすい。

一方，プラズマは下記の要因で様々な波動がある。

- イオン電子の少なくとも２種類の構成粒子がある。
- 密度に対する依存性（プラズマ振動数 Π），磁場に対する依存性（サイクロトロン周波数 Ω），熱運動に対する依存性（kT）がある。
- 磁場の向き，波動の伝搬方向，電場の向き，変位の向きの関係がある。

これらの様々な側面に対応していろいろな分類方法がある。

1. 静電波，電磁波
   静電波では $\vec{E} = -\nabla\phi = -i\vec{k}\phi \quad \rightarrow \vec{E} \parallel \vec{k},\ \vec{B}_1 = 0$
   電磁波では $\vec{B}_1 \neq 0$
2. 熱いプラズマ，冷たいプラズマ
   kT が分散式に入るか否か
3. R 波 L 波
   右回り円偏光か左回り円偏光か
4. 正常波 (O 波)，異常波（X 波）
   偏光面が磁場に平行か垂直か
5. 速波（Fast Wave），遅波（Slow Wave）
   位相速度が速いか遅いか

次節で説明する冷たいプラズマの場合には分散式から２種類の波しか存在せず，この２つを区別するのに上記の 3, 4, 5 が用いられる

7.2 冷たいプラズマの分散式

7.2.1 誘電率テンソルの重要性

波動による摂動 $\vec{B}_1, \vec{E}, \vec{v}_k$ が１次の微少量で $\propto e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ の依存性を持つとする。

荷電粒子の運動は電流

$$\vec{j} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k \tag{109}$$

をつくる。。これにより電束密度（電気変位）

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 + \frac{i\vec{j}}{\omega} = \epsilon_0\overleftarrow{K}\cdot\vec{E} \tag{110}$$

が生じる。ここで，$\overleftarrow{K}$ は誘電率テンソルと呼ばれる。一方，Maxwell 方程式

$$\begin{aligned}\vec{k}\times\vec{E} &= \omega\vec{B}_1 \\ \vec{k}\times H_1 &= -\omega\epsilon_0\overleftarrow{K}\cdot\vec{E}\end{aligned} \tag{111}$$

から波動方程式

$$\begin{aligned}\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2}\overleftarrow{K}\cdot\vec{E} &= 0 \\ \vec{N}\times(\vec{N}\times\vec{E}) + \overleftarrow{K}\cdot\vec{E} &= 0\end{aligned} \tag{112}$$

が得られる。ただし，$\vec{N} = \frac{\vec{k}c}{\omega}$ は屈折率を表す。これが $\vec{E} \neq 0$ の解を持つ条件から，波の満たすべき $\omega, \vec{k}$ の関係式が得られ，これを波の分散式と言う。従って，波の特性を理解するには，誘電率テンソル $\overleftarrow{K}$ を求め，分散式を求める必要がある。また，考えているパラメータ（周波数，伝播方向）によって $\overleftarrow{K}$ 中のどの項が重要になるかが異なり，様々な種類の波動が現われる。

7.2.2 分散式

波動による摂動 $\vec{B}_1, \vec{E}, \vec{v}_k$ が１次の微少量で $\propto e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ の依存性を持つとする。添え字の $_k$ はイオンまたは電子を表す。また０次の量は一定，一様であるとし，磁場の向きを z 方向にとる。粒子の運動方程式は

$$\begin{aligned}m_k\frac{d\vec{v}_k}{dt} &= q_k(\vec{E} + \vec{v}_k\times\vec{B}) \\ -i\omega m_k\vec{v}_k &= q_k(\vec{E} + \vec{v}_k\times\vec{B}_0)\end{aligned} \tag{113}$$

この方程式の解は

$$\begin{aligned}v_{kx} &= -i\frac{E_x}{B_0}\frac{\Omega_k\omega}{\omega^2-\Omega_k^2} - \frac{E_y}{B_0}\frac{\Omega_k^2}{\omega^2-\Omega_k^2} \\ v_{ky} &= \frac{E_x}{B_0}\frac{\Omega_k^2}{\omega^2-\Omega_k^2} - i\frac{E_y}{B_0}\frac{\Omega_k\omega}{\omega^2-\Omega_k^2} \\ v_{kz} &= -i\frac{E_z}{B_0}\frac{\Omega_k}{\omega}\end{aligned} \tag{114}$$

ただし，$\Omega_k = -\frac{q_k B_0}{m_k}$ これを式 (109), (110) に代入すると

$$\overleftarrow{K}\cdot\vec{E} = \begin{pmatrix} K_\perp & -iK_\times & 0 \\ iK_\times & K_\perp & 0 \\ 0 & 0 & K_\parallel \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{115}$$

ただし，

$$K_\perp \equiv 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2-\Omega_e^2} - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2-\Omega_i^2} \tag{116}$$

$$K_\times \equiv -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2-\Omega_e^2}\frac{\Omega_e}{\omega} - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2-\Omega_i^2}\frac{\Omega_i}{\omega} \quad (117)$$

$$K_\parallel \equiv 1-\frac{\Pi_e^2+\Pi_i^2}{\omega^2} \sim 1-\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \quad (118)$$

$$\Pi_e \equiv \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}\ , \quad \Pi_i \equiv \sqrt{\frac{n_e q^2}{\epsilon_0 m_i}} \quad (119)$$

また，

$$R \equiv 1-\frac{\Pi_e^2}{\omega(\omega-\Omega_e)} - \frac{\Pi_i^2}{\omega(\omega-\Omega_i)} = K_\perp + K_\times \quad (120)$$

$$L \equiv 1-\frac{\Pi_e^2}{\omega(\omega+\Omega_e)} - \frac{\Pi_i^2}{\omega(\omega+\Omega_i)} = K_\perp - K_\times \quad (121)$$

とする。ここで，$\vec{k}$, $\vec{N}$ が xz 面内になるように z 軸をとり，z 軸となす角を θ とすると式 (112) は

$$\begin{pmatrix} K_\perp - N^2\cos^2\theta & -iK_\times & N^2\sin\theta\cos\theta \\ iK_\times & K_\perp - N^2 & 0 \\ N^2\sin\theta\cos\theta & 0 & K_\parallel - N^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (122)$$

この連立方程式を満たす $\vec{E} \neq 0$ が存在するためには，行列式が 0 でなければならない。すなわち，分散式

$$AN^4 - BN^2 + C = 0 \quad (123)$$

$$\rightarrow N^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2A} \quad (124)$$

が得られる。ただし，

$$A \equiv K_\perp^2 \sin^2\theta + K_\parallel \cos^2\theta$$

$$B \equiv (K_\perp^2 - K_\times^2)\sin^2\theta + K_\parallel K_\perp (1+\cos^2\theta)$$

$$C \equiv K_\parallel (K_\perp^2 - K_\times^2) = K_\parallel RL \quad (125)$$

7.2.3 伝播方向と偏波方向

ここで，さらに $\theta = 0, \pi/2$ 場合について整理する。実際には $0 < \theta = 0 < \pi/2$ の場合がある。

- 磁力線に平行に伝播する波 ($\theta = 0$)
この時，式 (123) は

$$K_\parallel \times \left(N^4 - 2K_\perp N^2 + K_\perp^2 - K_\times^2\right) \quad (126)$$

この解は以下の 3 つで，

$$K_\parallel = 0 \quad (127)$$

$$N^2 = K_\perp + K_\times = R \quad (128)$$

$$N^2 = K_\perp - K_\times = L \quad (129)$$

$K_\parallel = 0$ はプラズマ振動を表し これを満たす $\omega = \Pi$ に対して 任意の k_z, E_z が可能な静電波である。

式 (122) の y 成分から

$$iK_\times E_x (K_\perp - N^2) E_y = 0$$

$$\rightarrow \frac{iE_x}{E_y} = \frac{N^2 - K_\perp}{K_\times} \quad (130)$$

従って，$N^2 = R$, $N^2 = L$ に対応して，

$$\frac{iE_x}{E_y} = \pm 1$$

これらは，z 方向に伝播し，E_x, E_y をもつ電磁波であり，それぞれ，右回り円偏光，左回り円偏光となる。

- 磁力線に垂直に伝播する波 ($\theta = \pi/2$)
この時，式 (123) は

$$K_\perp N^4 - \left(K_\perp^2 - K_\times^2 + K_\parallel K_\perp\right) N^2 + K_\parallel \left(K_\perp^2 - K_\times^2\right) \quad (131)$$

この解は以下の 2 つで，

$$N^2 = \frac{K_\perp^2 - K_\times^2}{K_\perp} = \frac{RL}{K_\perp} \quad (132)$$

$$N^2 = K_\parallel \quad (133)$$

$N^2 = K_\parallel$ の時，$E_x = E_y = 0$, $E_z \neq 0$ でこの波は磁場に平行な偏波成分をもつ。一方，$N^2 = \frac{RL}{K_\perp}$ の時，$E_x = \frac{iK_x}{K_\perp}E_y$, $E_z = 0$ となり，磁場に平行な電場はない。前者を正常波，後者を異常波と呼ぶ。

7.3 波動方程式と分散式の関係

分散式は，狭い意味での WKB 近似であり，波の波長の変化の空間スケールが波長よりも十分長いという仮定をしている。量子力学における WKB 近似と同じ手法を使ってこれを示す。

位相速度 v をもつ 1 次元の波の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (134)$$

ここである周波数 ω のみを考え，$E = E(x)e^{-i\omega t}$ として変数分離を行うと波動方程式は

$$E'' + \frac{\omega^2}{v^2}E = E'' + k_0^2 N^2 E = 0 \quad (135)$$

ここで，$N = \frac{c}{v} = \frac{kc}{\omega}$ は屈折率を表す。

一方，量子力学では，Sch́oredinger 方程式

$$\frac{\hbar}{2m}\Phi'' + (E-V)\Phi = 0$$

において

$$\Phi = e^{iS/\hbar}\ , \quad S = S_0 + \frac{\hbar}{i}S_1 + \dots$$

と近似した。これに対応して $E(x) = e^{i\phi(x)}$ とおくと波動方程式は

$$\phi'^2 - i\phi'' - N^2 k_0^2 = 0 \quad (136)$$

となる。ここで，$\phi = \phi_0 + \phi_1$ とおくと 0 次，1 次の式は

$$\phi_0'^2 = N^2 k_0^2\ , \quad \rightarrow \quad \phi_0' = k = \pm N k_0$$

$$2\phi_0'\phi_1' = i\phi_0''\ , \quad \rightarrow \quad \phi_1' = \frac{i\phi_0''}{\phi_0'} \quad (137)$$

ここで，もし

$$\left|\frac{1\text{ 次の項}}{2\text{ 次の項}}\right| = \left|\frac{\phi_0''}{\phi_0'^2}\right| \ll 1$$
$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left|\frac{1}{\phi_0'}\right| = \frac{d}{dx}\left|\frac{1}{k}\right| \ll 1 \quad (138)$$

であれば，この近似（展開）は正しい。これは，波長の変化が波長に比べて十分緩やかであることを意味する。この時,

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \pm\int Nk_0 dx \\ \phi_1 &= \frac{i}{2}\log|\phi_0'| = \frac{i}{2}\log|Nk_0|\end{aligned} \quad (139)$$

となり，波の振幅は

$$E = e^{i\phi} = \frac{1}{\sqrt{Nk_0}}e^{\pm i\int Nk_0 dx} \quad (140)$$

従って，分散式は WKB 近似をしたときの位相項を表現したものである。WKB 近似が成立しないときには，式 (135) を解かなければならない。

7.4 カットオフと共鳴

屈折率が 0 となることをカットオフ，∞ になることを共鳴という。

最初にカットオフを考える。波が $N^2 > 0$ の領域から $N^2 < 0$ の領域へ伝播するとき式 (140) から，N^2 での解は

$$E \propto \frac{1}{\sqrt{Nk_0}}e^{\pm i\int Nk_0 dx}$$

となる。$N = 1$ の独立な 2 つの解 sine, cosine は Cutoff が近づくにつれて波長がながくなり，振幅は徐々に増えていく。一方，$N^2 < 0$ の解は収束する解と発散する解

$$E \propto e^{\pm|Nk_0|x}$$

を持つ。$N^2 \sim 0$ では WKB 近似は成立しない。N^2 が Cutoff 付近で線形に変化すると近似すれば，この付近での解は Airy 関数で表される。これらの解を接続することにより近似解が得られる。$N^2 > 0$ から波が入射する場合には，収束する解しか現われない。これは，すなわち，2 つの独立な解の線形結合が入射波と反射波の重ね合わせを表し，両者は $N^2 > 0$ の領域では定在波を構成する。波の位相速度は Cutoff に近づくにつれて無限大になるが群速度は 0 にちかづく。

同様に共鳴する場合を考える。共鳴点に近づくに従って波長は短くなり，位相速度，群速度は 0 に近づく。振幅は減少する。位相速度が小さくなり，プラズマの熱速度付近にまでなると後述する Landau 減衰により，波のエネルギーはプラズマの熱エネルギーに変換される。

7.5 カットオフと共鳴の応用

- カットオフ
  電離層は弱電離プラズマで丁度短波放送の波が反射される。短波放送では電離層と地上の間で波が反射を繰り返すことにより，見通しの確保できないような長距離の波動伝播が可能となる。

  宇宙船の大気突入時に通信ができなくなるのも，宇宙船のまわりにプラズマができるためである。

  また，入射した波の反射してくる時間（位相）を測定するとことにより，プラズマの位置や，密度分布の測定が可能となる。

- 共鳴
  共鳴を利用することにより，波のエネルギーをプラズマに吸収させることができる。これにより，プラズマを加熱したり，プラズマ中の電子を加速して，電流を流したりすることができる。

7.6 R 波 L 波，O 波 X 波

ここでは，R 波 L 波，O 波 X 波の具体的な分散式を求める。最初に $\Pi_e \gg \Pi_i$, $\Omega_e \gg |\Omega_i|$, $Pi_e^2\Omega_i + Pi_i^2\Omega_e = 0$ を利用して，$K_\parallel$, R, L を整理する。

$$K_\parallel \sim 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega} \quad (141)$$
$$R \sim \frac{(\omega-\omega_R)(\omega+\omega_L)}{(\omega-\Omega_e)(\omega-\omega_i)} \quad (142)$$
$$L \sim \frac{(\omega-\omega_R)(\omega+\omega_L)}{(\omega+\Omega_e)(\omega+\omega_i)} \quad (143)$$
$$(144)$$

ただし，

$$\omega_R = \frac{\Omega_e}{2} + \sqrt{\frac{\Omega_e^2}{4} + \Pi_e^2 - \Omega_e\Omega_i} \quad (145)$$
$$\omega_L = -\frac{\Omega_e}{2} + \sqrt{\frac{\Omega_e^2}{4} + \Pi_e^2 - \Omega_e\Omega_i} \quad (146)$$

分散関係は通常横軸に $k(ck)$ をとり，縦軸に ω をとって表されることが多い。グラフの傾き $\frac{\partial\omega}{\partial k}$ は群速度を表し，グラフ上の点と原点をとおる線の傾き $\frac{\omega}{k}$ は位相速度をあらわす。

- $\theta = 0$ (R 波，L 波) の時
  - R 波
    分散式の解が $N^2 = R$ の時は，光速で規格化した波の位相速度の自乗は

$$\frac{\omega^2}{c^2k_\parallel^2} = \frac{1}{R} = \frac{(\omega+|\Omega_i|)(\omega-\Omega_e)}{(\omega-\omega_R)(\omega+\omega_L)} \quad (147)$$

$\omega > 0$であるので，位相速度が無限大になる（すなわちカットオフになる）のは，$\omega = \omega_R$ の時。また，位相速度が 0 になる（共鳴する）のは，$\omega = \Omega_e$ の時。ω の十分大きいところでは，位相速度は光速に近づく

– L 波
分散式の解が $N^2 = L$ の時は，光速で規格化した波の位相速度の自乗は

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_\parallel^2} = \frac{1}{L} = \frac{(\omega - |\Omega_i|)(\omega + \Omega_e)}{(\omega - \omega_L)(\omega + \omega_R)} \tag{148}$$

位相速度が無限大になる（すなわちカットオフになる）のは，$\omega = \omega_L$ の時。また，位相速度が 0 になる（共鳴する）のは，$\omega = |\Omega_i|$ の時。ω の十分大きいところでは，位相速度は光速に近づく

R 波，L 波ともに $\frac{\omega^2}{c^2 k_\parallel^2} < 0$ の時，波は伝播せず，evanescent になる。分散関係は図のようになる。

- $\theta = \pi/2$ (O 波，X 波) の時

– O 波（正常波）
分散式の解が $N^2 =$ の時は，光速で規格化した波の位相速度の自乗は

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_\perp^2} = \frac{1}{K_\parallel} = \frac{1}{1 - \Pi_e^2/\omega^2} = 1 + \frac{\Pi_e^2}{c^2 k_\perp^2} \tag{149}$$

位相速度が無限大になる（すなわちカットオフになる）のは，$\omega = \Pi_e$ の時。ω の十分大きいところでは，位相速度は光速に近づく

– X 波（異常波）
分散式の解が $N^2 =$ の時は，光速で規格化した波の位相速度の自乗は

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{c^2 k_\perp^2} &= \frac{K_\perp}{RL} = \frac{R+L}{2RL} \\ &\sim \frac{\omega^4 - (\Pi_e^2 + \Omega_e^2)\omega^2 + \Omega_e^2\Omega_i^2 - \Pi_e^2\Omega_e\Omega_i}{(\omega^2 - \omega_L^2)(\omega^2 - \omega_R^2)} \\ &= \frac{(\omega^2 - \omega_{LH}^2)(\omega^2 - \omega_{UH}^2)}{(\omega^2 - \omega_L^2)(\omega^2 - \omega_R^2)} \qquad (150)\end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\omega_{UH}^2 &= \Omega_e^2 + \Pi_e^2 \qquad (151)\\ \omega_{LH}^2 &= \frac{-\Pi_e^2\Omega_e\Omega_i - \Omega_e^2\Omega_i^2}{\Pi_e^2 + \Omega_e^2} = \\ &\left(\frac{1}{\Omega_i^2 + \Pi_i^2} - \frac{1}{\Omega_i\Omega_e}\right)^{-1} \qquad (152)\end{aligned}$$

この波は，$\omega = \omega_R$, $\omega = \omega_L$ でカットオフを持ち，$\omega = \omega_{UH}$，$\omega = \omega_{LH}$ で共鳴をもつ。

8 波と粒子の相互作用

波の持つ電場は振動しており，止まっている粒子に対しては仕事をしない。しかしながら，粒子が運動していて，粒子から見て波の作る電場が常に一定であれば，粒子は系統的な加速，あるいは減速を受ける。ここでは，磁力線に平行方向の加速を引き起こす Landau 減衰と垂直方向の加速を引き起こす cyclotron 減衰について述べる。

8.1 Landau 減衰

磁力線の向き（z 方向）に進む静電波と z 方向に速度 v_0 で走る粒子の相互作用を考える。この時，電場，磁場，粒子の速度，加速度は平行である。波の位相速度 ω/k と粒子の速度 v_0 が近いと，粒子から見たときの電場はほぼ一定となり，粒子は大きく加速，減速される。電場の強さを $E = E \times \cos{(kz - v_0 t)}$ 粒子の速度を $v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ と展開する。0 次の項は

$$v = v_0, \quad z = z_0 + v_0 t$$

１次の項は

$$\begin{aligned}\dot{v_1} &= \frac{qE}{m}\cos{(kv_0 t + k_z 0 - \omega t)} \\ &= \frac{qE}{m}\cos{(\alpha t + \phi_0)} \qquad (153)\end{aligned}$$

ただし，

$$\alpha \equiv kv_0 - \omega t, \quad \phi_0 \equiv kz_0$$

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{qE}{m}\frac{\sin{(\alpha t + \phi_0)} - \sin\phi_0}{\alpha} \\ z_1 &= \frac{qE}{m}\left(\frac{\cos\phi_0 - \cos{(\alpha t + \phi_0)}}{\alpha^2} - \frac{\sin\phi_0}{\alpha}t\right) \qquad (154)\end{aligned}$$

１次+２次は

$$\begin{aligned}\dot{v_1} + \dot{v_2} &= \frac{qE}{m}\cos{(\alpha t + \phi_0 + kz_1)} \\ &\sim \frac{qE}{m}\left(\cos{(\alpha t + \phi_0)} - \sin{(\alpha t + \phi_0)}kz_1\right) \qquad (155)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\dot{v_2} &= -\frac{qE}{m}\sin{(\alpha t + \phi_0)}kz_1 \\ &= \frac{q^2E^2}{m}k\sin{(\alpha t + \phi_0)} \\ &\quad \times \left(\frac{\cos\phi_0 - \cos{(\alpha t + \phi_0)}}{\alpha^2} - \frac{\sin\phi_0}{\alpha}t\right) \qquad (156)\end{aligned}$$

一方，運動エネルギーの変化は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) &= vm\dot{v} = v_0 m\dot{v_1} v_1 m\dot{v_1} + v_0 m\dot{v_0} \\ &= v_0 qE\cos{(\alpha t + \phi_0)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{q^2E^2}{m}\cos(\alpha t+\phi_0)\frac{\sin(\alpha t+\phi_0)-\sin\phi_0}{\alpha} \\
&-kv_0\frac{q^2E^2}{m}\sin(\alpha t+\phi_0) \\
&\times\left(\frac{\cos\phi_0-\cos(\alpha t+\phi_0)}{\alpha^2}-\frac{\sin\phi_0}{\alpha}t\right)
\end{aligned} \tag{157}
$$

ここで，ϕ_0 に関して平均 $\langle\rangle$ をとると

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\frac{q^2E^2}{2m}\left(-\frac{\omega\sin\alpha t}{\alpha^2}+\frac{kv_0\cos\alpha t}{\alpha}\right) \tag{158}
$$

さらに分布関数をかけて速度で積分することによってプラズマが全体として受け取るエネルギーが求められる。上式の第２項は第１項に比べて小さく，無視できる。なぜなら，第１項は $\sin x/x$，第２項は $\cos x$ の依存性を持ち，積分範囲が広いとき

$$
\int\frac{\sin x}{x}dx\to\pi\ ,\quad \int\cos x dx\to 0
$$

また，$x\sim 0$ で常に $\sin x/x>\cos x$。第１項は $\alpha\sim 0$ で値を持つので，この付近で分布関数を

$$
f(v)\sim f(v_0)+\frac{\alpha}{k}\frac{\partial f}{\partial v}
$$

と展開し，積分すると

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=-\frac{\pi q^2E^2}{2m|k|}\frac{\omega}{k}\frac{\partial f}{\partial v} \tag{159}
$$

となる。従って，分布関数の勾配によりエネルギーのやり取りの向きが交代する

8.2 Cyclotron 減衰

磁場 $\vec{B}_0$ に平行に伝播する R 波 L 波による垂直方向の加速を考える。電場 $E_xe^{i(kz-\omega t)}$, $E_y^{i(kz-\omega t)}$ があるとき波の作る磁場は

$$
\vec{B}_1=\vec{k}\times\vec{E}/\omega
$$

である。磁場に沿って V の速度を持つ粒子の垂直成分の運動方程式は

$$
m\dot{\vec{v}}+mV\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}_0\vec{V}\times\vec{B}_1\right) \tag{160}
$$

x 成分，y 成分について書くと

$$
\begin{aligned}
\dot{v_x}+ikVv_x&=\frac{qE_x}{m}(1-Vk/\omega)-\Omega v_y \\
\dot{v_y}+ikVv_y&=\frac{qE_y}{m}(1-Vk/\omega)+\Omega v_x
\end{aligned} \tag{161}
$$

ここで，$v^\pm=v_x\pm iv_y$, $E^\pm=(E_x\pm iE_y)e^{i(kz-\omega t)}$ とすると，

$$
\dot{v^\pm}=(\pm i\Omega-ikV)v^\pm+\frac{q(\omega-Vk)}{m\omega}E^\pm \tag{162}
$$

この解は

$$
v^\pm=\frac{iqE^\pm(\omega-kV)}{m\omega}\frac{1-e^{i(\omega-kV\pm\Omega)t}}{\omega-kV\pm\Omega} \tag{163}
$$

粒子群の変化を見るためには，$\langle v\rangle=\int dVv$ を計算すればよい。ここで，

$$
c^\pm=\int dvf(v)\frac{(1-kV/\omega)(1-e^{i(\omega-kV\pm\Omega)})}{\omega-kV\pm\Omega}
$$

とすると

$$
\langle v^\pm\rangle=\frac{iq}{2m}c^\pm E^\pm e^{i(kz-\omega t)}
$$

$$
\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{v^++v^-}{2} \\ \frac{v^+-v^-}{2i} \end{pmatrix}=\frac{iq}{4m}\begin{pmatrix} c^+E^+c^-E^- \\ -ic^+E^+ic^-E^- \end{pmatrix}e^{i(kz-\omega t)}
$$

粒子群が波から受け取る単位時間あたりのエネルギーは

$$
\begin{aligned}
&q\left(Re(v_x)Re(E_xe^{i(kz-\omega t)}+Re(v_y)Re(E_ye^{i(kz-\omega t)}+\right) \\
&=\frac{q^2}{4m}\left(-Im(c^+)|E^+|^2-Im(c^-)|E^-|^2\right)
\end{aligned} \tag{164}
$$

ここで，$Im(c^\pm)$

$$
\begin{aligned}
Im(c^\pm)\quad&=\quad-\int dvf(v)\frac{(1-kV/\omega)\sin(\omega-kV\pm\Omega)}{\omega-kV\pm\Omega} \\
&\to\quad\pm\frac{\pi\Omega}{\omega|k|}f\left(\frac{\omega\pm\Omega}{k}\right)
\end{aligned} \tag{165}
$$

これらの式から，粒子が波からエネルギーを受け取るためには E^+, E^- の波が必要。磁力線に平行に伝播する $(\theta=0$ の) 波の場合には，それぞれ，L 波，R 波に対応する。また相互作用するのは，主として，$v\sim\frac{\omega\pm\Omega}{k}$ の速度をもつ粒子である。この時，粒子から見た波の偏波はサイクロトロン周波数 Ω で回転している。

ここで，R 波の場合を考える。この時，$E^+=0$,$E^-\neq 0$ 従って粒子の受けとるパワーは

$$
+\frac{q^2}{4m}\frac{\pi\Omega}{\omega|k|}f\left(\frac{\omega-\Omega}{k}\right)|E^-|^2
$$

通常，波の位相速度 ω/k は粒子の速度よりも速い。従って，$\Omega_e>0$ の場合と $\Omega_i<0$ の場合を比較すると前者の方が相互作用する粒子が多く，波のエネルギーは電子に吸収される。特に，波が共鳴面に近づく時には，位相速度がおそくなるので，相互作用が大きくなる。

次に L 波の場合を考える。この時，$E^+=0$,$E^-\neq 0$ 従って粒子の受けとるパワーは

$$
-\frac{q^2}{4m}\frac{\pi\Omega}{\omega|k|}f\left(\frac{\omega+\Omega}{k}\right)|E^+|^2
$$

となり，R 波とは逆にエネルギーはイオンに吸収される。