プラズマ物理学講義レジュメ
(Resume of the lecture on plasma physics)

江尻晶 (Akira Ejiri)

2021 年度 S1S2 学期 (S1S2 term, AY2021)

目次

この講義の目的 (Objectives)

プラズマとは荷電粒子の集合である。各粒子は磁場、電場の中で複雑な軌道を描くだけでなく、電場と磁場を自ら生成し相互作用する。粒子の集合は衝突、拡散によって熱平衡状態に近づこうとするが、高温で閉込めのよい系は、衝突、拡散が小さく、熱平衡状態からはるかに離れたところにある。プラズマ物理学の基本概念を述べるとともに、身の回りから天体にいたるまでのプラズマを紹介する。Plasma is a group of charged particles. Not only they are affected by electric and magnetic fields, but also they generate the fields. While they tends to relax to an equilibrium state through collisions, they often stay at a state far from the equilibrium. As a result, plasma shows very compicated phenomena. In the lecture, the basics of plasma physics are explained.

1 様々なプラズマ (Various plasmas)

1.1 様々なプラズマ (Various plasmas)

1.2 プラズマを特徴づける量 (Parameters to characterize a plasma)

温度 (temperature) と密度 (density) はプラズマを特徴づけるもっとも重要な量である。

- 温度 (temperature) [eV]: 1 [eV] = 11,600 [K] =1.602 $\times$ 10^{-19} [J](C·V)
- 数密度 (density) [m^{-3}] 参考：1 [atm] $\sim$ 2.5 $\times$ 10^{25} [m^{-3}]

温度：１自由度 (degree of freedom) あたりの平均エネルギー：$kT/2$。
電子 (electron) と 水素イオン (hydrogen ion) （陽子 (proton)）の熱速度 (thermal speed) は

- 電子 (electron): $v_{Te} = \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}} \sim 4.2 \times 10^5 \sqrt{T_e[\mathrm{eV}]}$ [m/s]
- 水素イオン (hydrogen ion)：$v_{Ti} = \sqrt{\frac{kT_i}{m_i}} \sim 1.0 \times 10^4 \sqrt{T_i[\mathrm{eV}]}$ [m/s]

物体の温度を上げていくと固体 (solid)，液体 (liquid)，気体 (gas) の状態を経て，イオン (ion) と電子 (electron) に電離（イオン化 (ionization)）したプラズマ (plasma) の状態になる。電離過程 (ionization process) には

- 電子衝突電離 (electron impact ionization)
- イオン衝突電離 (ion impact ionization)
- 光電離 (photo-ionization)
- 熱電離 (thermal ionization)

がある。

(Apr. 7, 2017)

1.3 サハの熱電離平衡 (Saha's thermal ionization equilibrium)

電離過程 (ionization process) が熱平衡状態 (thermal equilibrium) である場合、電離度 (ionziation degree) は物質と温度のみに依存することがサハ（Saha）によって導かれた。ここでは、$\mathrm{H}^+ + \mathrm{e}^- \longleftrightarrow \mathrm{H}^0 + 13.6$ eV についてサハの公式を導く。エネルギー (energy) $p^2/2m$ の準位にある粒子の分布 (particle distribution) は、

$$n(p) = \frac{1}{h^3} \frac{g}{e^{(-\mu+\epsilon+p^2/2m)/kT} \pm 1} \tag{1}$$

で表される。μ は化学ポテンシャル (chemical potential)、ϵ はポテンシャルエネルギー (potential)、$\pm$ はそれぞれフェルミ粒子 (Fermion)、ボーズ粒子 (Boson) の場合を表す。密度が薄く、温度が高い場合 ($e^{(-\mu+\epsilon+p^2/2m)/kT} \gg 1$)、分布はマクスウェル分布 (Maxwell distribution)

$$n(p) \sim \frac{g}{h^3} e^{(\mu-\epsilon-p^2/2m)/kT} \tag{2}$$

で近似できる。粒子の密度 (density) は、分布関数を p で積分して

$$n = \int_0^\infty 4\pi p^2 n(p) dp = \frac{(2\pi mkT)^{3/2} g}{h^3} e^{\mu/kT} e^{-\epsilon/kT} \tag{3}$$

となる。電子 (electron)、水素イオン (hydrogen ion)、水素原子 (hydrogen atom) の粒子密度を求め、イオン化エネルギー (ionization energy) が 13.6 eV であること、平衡状態では反応の前後で化学ポテンシャルの和が等しい　$\mu^+ + \mu^- = \mu^0$ こと、電子のスピン (spin) の自由度の 2 を考慮すると（$g^- = 2,\ g^+ = 1,\ g^0 = 2$）

$$\frac{n^+ n_e}{n^0} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-13.6\mathrm{eV}/kT} \tag{4}$$

が得られる。電離度 (ionization degree) を $x \equiv \frac{n^+}{n^0+n^+}$ とすると、サハの公式 (Saha ionization equation)

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{n} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\epsilon_i/kT} \tag{5}$$

が導かれる。$n = n^0 + n^+$、$\epsilon_i > 0$ はイオン化エネルギー (ionization energy)

1.4 衝突時間 (Collision time)

電子 (electron) と止まっている電荷数 (charge number)$+Z$ のイオン (ion) のクーロン散乱 (Coulomb scattering) を考える。衝突とは運動量が大きく変化することであり、もっとも接近した時（距離 r_0）では、運動エネルギー (kinetic energy) とクーロンエネルギー (Coulomb energy) は同程度だと考えられる。このことから

$$\frac{1}{2}m_e v_e^2 \sim \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \to r_0 \sim \frac{Ze^2}{m_e v_e^2 \epsilon_0} \tag{6}$$

従って、断面積 (crosssection)σ は

$$\sigma \sim \pi r_0^2 \sim \frac{Z^2 e^4}{m_e^2 v_e^4 \epsilon_0^2} \tag{7}$$

衝突対象 (target) の密度 (density) が n であるとして電子が時間 (time)τ の間に距離 (distance)$l = v_e \tau$ だけ走って衝突する確率 (probability) が 100% になるとすると

$$n\sigma l \sim n\sigma v_e \tau \sim 1 \tag{8}$$

となる。このことから電子イオンの衝突時間 (electron-ion collision time)τ_{ei} は

$$\tau_{ei} \sim \frac{1}{n\sigma v_e} \sim \frac{\epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3}{nZ^2 e^4} \sim \frac{\epsilon_0^2 \sqrt{m_e}(kT_e)^{3/2}}{nZ^2 e^4} \tag{9}$$

となる。最後の式で $v_e = \sqrt{kT_e/m_e}$ とした。この時の l は平均自由行程 (mean free path)$\lambda_{ei} = v_e \tau_{ei}$ となる。

イオン同士の衝突時間 (ion-ion collision time)τ_{ii}、電子同士の衝突時間 (electron-electron collision time)τ_{ee} も同様にして

$$\tau_{ii} \sim \frac{\epsilon_0^2 \sqrt{m_i}(kT_i)^{3/2}}{nZ^4 e^4}, \quad \tau_{ee} \sim \frac{\epsilon_0^2 \sqrt{m_e}(kT_e)^{3/2}}{ne^4} \tag{10}$$

となる。上で求めた τ_{ei} 等は運動量の変化で定義した衝突時間であり、電子とイオンのエネルギー変化の時定数はもっと遅いことに注意。具体的には約 m_e/m_i 倍となる。また、クーロン力は遠距離力 (long range force) でありクーロン散乱を厳密に計算すると断面積が発散することが知られている。実際のプラズマ中では、後で述べるデバイ遮蔽 (Debye shield) の影響があり、デバイ長 (Debye length) 程度の距離までの衝突パラメータ (impact parameter) を考えればよく、この効果をクーロン対数 (Coulomb logarithm) と呼ばれる係数 $\ln\Lambda$ で表す。

1.5 電気抵抗 (resistivity)

電気抵抗 (electric resistivity) は、電場 (electric field) による加速度 (acceleration)eE/m_e が衝突時間 τ_{ei} の間に得る速度 v_e から電流密度 (current density)$j = env_e$ が決まると考えることで求められる。抵抗率 η の公式は

$$\eta \sim 5.2 \times 10^{-5} \frac{Z \ln\Lambda}{T_e^{3/2}} \ [\Omega\mathrm{m}] \quad (T_e \ \mathrm{in[eV]}) \tag{11}$$

となる。

1.6 プラズマ中のスケール (scales in plasma)

- エネルギー (energy)：
  熱エネルギー (thermal energy)、クーロンエネルギー (Coulomb energy)、フェルミエネルギー (Fermi energy)、静電エネルギー (electrostatic energy)、磁場エネルギー (magnetic energy)、核反応エネルギー (nuclear reaction energy)、イオン化エネルギー (ionization energy)、光子エネルギー (photon energy)
- 長さ (length)：
  全体のサイズ (system size)、デバイ長 (Debye length)、平均自由行程 (mean free path)、サイクロトロン半径（ラーマ半径）(cyclotron radius, Larmor radius)
- 時間 (time)：
  衝突時間 (collision time)、温度緩和時間 (temperature relaxation time)、サイクロトロン周波数 (cyclotron frequency)、波や振動の周期（wave frequency)、閉じ込め時間 (confinement time)

1.7 デバイ遮蔽 (Debye shield)

プラズマ中に電荷数 Z のイオンを置いたとする（テスト粒子 (test particle))。この時、周りの電子 (electron) はこのイオン (ion) に引き付けられる傾向がある。その結果、イオンの作るクーロン電場 (Coulomb field) は、電子によって遮蔽 (shield) される。電場が遮蔽される特徴的な距離をデバイ長 (Debye length)λ_D と呼ぶ。これは

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{n e^2}} \tag{12}$$

と表される。遮蔽されたあとのポテンシャル分布 (potential)$\phi(r)$、デバイ長は以下の手順で導くことができる。背景電子の密度 (background electron density) はマクスウェル分布 (Maxwell distribution function) を持ち、背景イオン (background ion) は重く遅いので動かないとする。

$$n_e = n e^{e\phi/kT_e}, \quad n_i = n \ (constant) \tag{13}$$

この時、$n_e - n_i = n(e^{e\phi/kT_e} - 1) \approx n\frac{e\phi}{kT_e}$。ポテンシャル ϕ はポアソン方程式 (Poisson's equation) を用いて

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{Ze}{\epsilon_0}\delta(r) + \frac{ne}{\epsilon_0}\frac{e\phi}{kT_e} \\ &= -\frac{Ze}{\epsilon_0}\delta(r) + \frac{\phi}{\lambda_D^2}\end{aligned} \tag{14}$$

となる。留数定理 (residue theorem) 等を用いて解くと

$$\phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D} \tag{15}$$

が得られる。便利な公式は以下の通り。

$$\lambda_D \approx 7.45 \times 10^{-7} \sqrt{\frac{kT_e[\mathrm{eV}]}{n\ [10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}]}} \quad [\mathrm{m}] \tag{16}$$

一般に、デバイ長は非常に小さい長さであり、プラズマの大部分は電場が非常に小さく、ほぼ中性である。ほぼ中性の状態を準中性 (quasi neutral) と呼ぶ。

(Apr. 14, 2017)

1.8 様々なプラズマ（その１）(various plasmas part 1)

- **蛍光灯 (fluorescent lamp)**

  グロー放電 (glow discharge) の一種で、$n_e \sim 10^{17}\mathrm{m}^{-3}$, $T_e \sim 1\mathrm{eV}$。Ar、Hg 混合気体を放電 (discharge) させると Ar、Hg の一部が電子衝突により電離する (electron impact ionization)。電子はさらに Hg と衝突し、Hg が励起され紫外線 (253nm, 185nm) が発生する。

$$\mathrm{Hg} + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{Hg}^* + \mathrm{e}^-$$
$$\mathrm{Hg}^* \rightarrow \mathrm{Hg} + \mathrm{h}\nu$$

  紫外線は蛍光体 (fluorescent material) で可視光に変換される。エネルギー変換効率 (efficiency) は白熱灯 (incandescent lamp) が 10% であるのに対して，蛍光灯では 25%。

- **核融合プラズマ (fusion plasma)**

  核融合反応 (nuclear fusion reaction)，例えば

  D+T $\rightarrow$ He^4(3.5MeV)+n(14MeV)

  を起こさせてエネルギーを取り出すためには、原子核間のクーロン反発 (Coulomb repulsion between nuclei) に打ち勝てるぐらいに温度を上げる必要がある。例えば，磁場閉じ込め方式 (magnetic confinement scheme) では、$T \geq 10\mathrm{keV}$, $n \geq 10^{20}\mathrm{m}^{-3}$ が必要。

1.9 プラズマ振動 (plasma oscillation)

１次元的な運動と（電子）密度の変動を考える。デバイ遮蔽を考えた時と同様に電子の密度 (electron density) のみが変化し、イオンの密度 (ion density) は一定とする。すなわち

$$n_e = n_0 + n_1, \quad n_i = n_0 \tag{17}$$

とする。ここで、n_0 は０次の時間的に空間的に一定の成分。n_1 は振動 (摂動) 成分ポアソン方程式 (Poisson's equation)，運動方程式 (equation of motion)，連続の式 (equation of continuity) は

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{en_1}{\epsilon_0}, \quad m_e\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v} \tag{18}$$

となる。ここで、１次の項のみを考えた。一次元で、フーリエ成分 $n_1 \propto e^{(i(kx-\omega t)}$ の形の解を想定して代入すると

$$ik\epsilon_0 E = -en_1 \tag{19}$$
$$-i\omega m_e v_e = -eE \tag{20}$$
$$-i\omega n_1 = -ikn_0 v_e \tag{21}$$

となる。n_1, v_e を消去して ω を求めると、$\omega^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}$。これを（電子）プラズマ振動数 ((electron) plasma frequency)Π_e or ω_{pe}

$$\Pi_e \equiv \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}, \quad \left(\text{便利な公式は、} f_{pe} \sim 90\sqrt{n\ [10^{20}\ \mathrm{m}^{-3}]} \quad [\mathrm{GHz}]\right) \tag{22}$$

と呼ぶ。振動数と波数 k は無関係で、これは通常の波とは異なり伝搬しない「振動」(oscillation) となる。プラズマ振動数は、ある種の波にたいしてカットオフ周波数 (cutoff frequency) となることを後日勉強する。電離層 (ionosphere) での短波 (HF, 3-30 MHz) の反射はその典型例である。

1.10 様々なプラズマ（その２）(various plasmas part 2)

- **プラズマ加速 (plasma acceleration)**
プラズマ中の電子密度の揺らぎ (electron density fluctuation)（プラズマ振動）があると電場 (electric field) が生じる。生成される電場の上限 (upper limit) は
$$E \sim \frac{mc}{e}\Pi_e \tag{23}$$
ただし、$\Pi_e = \sqrt{ne^2/m_e\epsilon_0}$ は電子プラズマ振動数 (electron plasma frequency)。大強度レーザー (high intensity laser) を用いると $E \sim 10^{12}\mathrm{V/m}$ 程度の電場を生成し、超高エネルギー加速器 (ultra high energy accelerator) を作ることができるかもしれない。

- **電離層 (ionosphere)**
太陽からの紫外線は地球大気上層で酸素等を光電離 (photo ionization) する。その結果 $T_e \sim 0.1\mathrm{eV}$, $n = 10^{11} \sim 10^{12}\mathrm{m}^{-3}$ の電離層が形成される。電離層の密度でのプラズマ振動 (electron plasma frequency) は短波 (HF, 3-30MHz) にあたる。この電波が反射されることで、地球の裏側への通信が可能となる。

- **強結合プラズマ (strongly coupled plasma)**
クーロンポテンシャル (Coulomb potential) と熱エネルギー（運動エネルギー）(thermal energy, kinetic energy) の比である結合係数 (coupling coefficient) は
$$\Gamma = \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 akT} \tag{24}$$
と表される。ここで $a \equiv (3/4\pi n)^{1/3}$ は平均距離 (mean distance)。$\Gamma > 1$ を強結合プラズマ (strongly coupled plasma), $\Gamma < 1$ を弱結合プラズマ (weakly coupled plasma) と呼ぶ。一方，デバイ数 (Debye number)N_D は，デバイ長を半径とする球内の電子数
$$N_D \equiv \frac{4\pi}{3}n\lambda_D^3 \tag{25}$$
で定義され，電荷 (charge) を遮蔽 (shield) するために必要な電子の数を表す。このデバイ数 (Debye number) は結合係数 (coupling constant) と
$$\Gamma = \frac{1}{3N_D^{2/3}} \tag{26}$$
の関係をもつ。したがって、$\Gamma \sim 1$ であれば、$N_D \sim 1$ である。ダストプラズマ (dust plasma)、電解質 (electrolyte) は強結合プラズマの例である。

- **縮退プラズマ (degenerate plasma)**
フェルミ粒子 (Fermion) である電子を空間的に詰め込んでいくと，電子のエネルギーの最大と最小の差はフェルミエネルギー (Fermi energy)
$$\epsilon_F \equiv (\hbar^2/2m_e)(3\pi^2 n)^{2/3} \tag{27}$$

で表される。$\epsilon_F > kT$ の場合のプラズマを縮退プラズマ (degenerate plasma) と呼ぶ。この時、電子のエネルギーの境界は明瞭であるが、温度を上げていくと境界があいまいになっていく（フェルミ分布 $\rightarrow$ マクスウェル分布)。温度が低い場合には電子はフェルミ粒子として振舞う（量子的な効果が大きい)。このようなプラズマを縮退プラズマと呼ぶ。

- **圧力電離 (pressure ionization)**
  原子間の平均距離 (mean distance between atoms)$(3/4\pi n)^{1/3}$ が原子のボーア半径 (Bohr radius) $4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$ 程度以下になると電子は自由電子 (free electron) として振舞うようになる。これを圧力電離 (pressure ionization) と呼ぶ。
- **輻射圧優勢プラズマ (radiation pressure dominated plasma)**
  熱平衡状態における黒体輻射の輻射圧は $(4\sigma/3c)(kT)^4$ と表され、プラズマの圧力 nkT よりも大きい場合には輻射圧がプラズマの運動に大きな影響を及ぼす。
- **太陽 (sun)**
  太陽の中心は $T = 1.5$ keV, $n = 10^{32}$ m^{-3}。周辺に行くに従って、温度，密度が減少する。太陽ではプラズマの圧力勾配 (pressure gradient) と重力 (gravity) が釣り合っている。核融合反応 (nuclear fusion reaction) により生成されたエネルギーは周辺に輸送され、コロナ (corona)、太陽風 (solar wind) となって噴出する。また、地球磁気圏内 (magnetosphere) に入りこむ。核融合が起こらなくなると、重力に打ち勝ってプラズマを支えることができず、星は崩壊する。
- **HI, HII 領域 (HI, HII region)**
  星を形成する過程で水素プラズマ・ガスは高温・低密度 (high temperature & low density) の電離した状態（HII）から低温・高密度 (low temperature & high density) の原子 (HI) へと変化（進化）していく。HII は Saha の式で電離度 50% 程度の領域にあり，HI での電離度は非常に小さい。なお、分光学 (spectroscopy) では、中性原子 (neutral atom) の発光を I、一価のイオン (singly charged ion) の発光を II、二価のイオン (doubly charged ion) の発光を III と表記する。
- **銀河団、銀河群 (galaxy cluster, galaxy group)**
  銀河の集合である銀河群、銀河団は $T \sim 1$ keV, $n \leq 10^3$ m^{-3} のプラズマで満たされていると考えられている。

(Apr. 21, 2017)

2 単一粒子の軌道 (Single particle orbit)

磁場に垂直な面内では、粒子はラーマ半径 (Larmor radius) 程度に広がりが抑えられる。ラーマ半径 (Larmor radius) がシステムの変化のスケールに比べて十分小さいとき，粒子は磁力線に沿って動くと見なしてよい（案内中心近似)。実際には、様々な要因により、案内中心（Guiding center）は磁力線に垂直に移動（ドリフト (drift)）することがある。この章ではドリフトを含む単一粒子の軌道を説明する。

2.1 サイクロトロン運動、ラーマ運動 (Cyclotron motion, Larmor motion)

電場 (electric field)、磁場 (magnetic field) 中の粒子の運動方程式 (equation of motion) は

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{28}$$

と表せる。ここで $\vec{B} \parallel \vec{e}_Z$ とし、$E=0$, B:一様 (homogeneous) の条件で考えると

$$\begin{aligned} \dot{v_x} &= qv_yB \\ \dot{v_y} &= -qv_xB \\ \dot{v_z} &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

この一般解 (general solution) は、

$$\begin{aligned} v_x &= -v_\perp \sin(\Omega t + \delta) \\ v_y &= v_\perp \cos(\Omega t + \delta) \\ v_z &= v_{z0} \end{aligned} \tag{30}$$

となり、半径 ρ の螺旋軌道 (spiral orbit) を描く。ただし、

$$\Omega = -\frac{qB}{m}, \quad \rho = \left|\frac{mv_\perp}{qB}\right| \tag{31}$$

はサイクロトロン周波数 (cyclotron (angular) frequency)、サイクロトロン半径（ラーマ半径）(cyclotron radius, Larmor radius) と呼ばれる。回転方向は、電荷に依存し、磁場をうち消す向き（反磁性 (diamagnetism)）である。ここで定義する Ω は正イオンでは負、電子では正となることに注意。また、教科書によって符号（の定義）が異なることに注意。$E_Z \neq 0$ の場合は、$\dot{v_z} = qE_Z/m$ となり、z 方向には加速度運動となる。また、磁場 B は仕事をしない。

サイクロトロン半径の例

- **マグネトロン (magnetron)**
  電子レンジ (microwave oven) ではマグネトロン (magnetron) がマイクロ波源 (microwave source) として用いられる。マグネトロン内では、電子 (electron) がサイクロトロン運動 (cyclotron motion) をしている。電子の典型的なエネルギーは 1 keV であり、磁場は $B = 0.087$ [T]、サイクロトロン周波数は 2.45 [GHz]、サイクロトロン半径は $\rho_e \sim 10^{-4}$[m] である。
- **銀河団、銀河群 (galaxy cluster, galaxy group)**
  典型的なエネルギーを 1 keV、典型的な磁場を 1 [μG] $\sim 10^{-10}$ [T] とする。電子、水素イオンのサイクロトロン周波数は $\Omega_{ce}/2\pi \sim 3$ [Hz]、$\Omega_{ci}/2\pi \sim 1.5$ [mHz] であり、サイクロトロン半径は、$\rho_e \sim 7 \times 10^5$[m]、$\rho_i \sim 3 \times 10^7$[m] となる。

2.2 各種のドリフト (various drifts)

案内中心 (guiding center) の動きをドリフト (drift) と呼ぶ。

- **$E \times B$ ドリフト**
  一様 (homogeneous) な磁場 $\vec{B}$ に垂直に一様な電場 $\vec{E}$ がかかっているときを考える（$E_\perp \neq 0$, $E_\parallel = 0$）。また、これらの電場磁場は時間的に変化しないとする。

$$\vec{v} = \vec{u}_E + \vec{u}\ , \quad \vec{u}_E \equiv \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \tag{32}$$

  として，Eq.(28) に代入すると

$$m\frac{d\vec{u}}{dt} = q\vec{u} \times \vec{B} \tag{33}$$

が成立し，粒子軌道は螺旋運動と $\vec{u}_E$ の重ね合わせとなる。u_E を $E \times B$ ドリフトと呼ぶ。このドリフトは $\vec{B}$（と $\vec{E}$）に垂直であり、ドリフトの向きと大きさは電荷 q、質量 m に依存しない。
より一般的な力 (arbitrary force)$m\vec{g}$ の場合には E を $m\vec{g}/q$ で置き換えて

$$\vec{u}_g = \frac{m\vec{g} \times \vec{B}}{qB^2} = -\frac{\vec{g} \times \vec{B}}{\Omega B} \tag{34}$$

となる。これを用いて各種ドリフトを導くことができる。

- **曲率ドリフト (curvature drift)**
磁場が曲率半径 R を持つとき，磁場に沿って $v_\parallel$ の速さを持つ粒子は遠心力 (centrifugal force)

$$\frac{m{v_\parallel}^2}{R}\vec{n} \tag{35}$$

を受ける。これによる曲率ドリフトは

$$\vec{u}_{curv} = \frac{\vec{B} \times v_\parallel^2 \frac{\vec{n}}{R}}{\Omega B} \tag{36}$$

となる。電子とイオンで向きも大きさも異なることに注意。

- **∇B ドリフト (grad. B drift)**
磁場に垂直方向に不均一な磁場 ($\nabla B \perp \vec{B}$)(inhomogeneous magnetic field) があるときを考える。ラーマ半径 (Larmor radius) に比べてゆっくり磁場が変化する場合には，$\vec{B} \sim \vec{B}_0 + (\vec{\rho}\cdot\nabla)\vec{B}$ とし，新たな力 $q\vec{v} \times (\vec{\rho}\cdot\nabla)\vec{B}$ によるドリフトを考えればよい。ただし，$\vec{v}$, $\vec{\rho}$ は下に示す一様磁場 $\vec{B}_0$ 中の 0 次のサイクロトロン運動で近似する。

$$\begin{aligned}\vec{\rho} &= (\rho\cos\Omega t, \rho\sin\Omega t, 0)\\ \vec{v} &= (-\rho\Omega\sin\Omega t, \rho\Omega\cos\Omega t, 0)\end{aligned} \tag{37}$$

一般に、磁場の勾配は、磁力線に垂直方向（$\nabla B \perp \vec{B}$）である場合と、磁力線方向（$\nabla B \parallel \vec{B}$）である場合に分類 (classify) できる。ここでは前者を考え、後者については後で説明する。
$\vec{B}_0 \parallel \vec{e}_z$ となるように座標系 (coordinate system) を選び、$\frac{\partial B_z}{\partial x} \neq 0 \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$ とすると

$$(\vec{\rho}\cdot\nabla)\vec{B} = \rho\cos\Omega t\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e}_z \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} \times (\vec{\rho}\cdot\nabla)\vec{B} &= -v_x(\vec{\rho}\cdot\nabla)B_z\vec{e}_y + v_y(\vec{\rho}\cdot\nabla)B_z\vec{e}_z\\ &= \rho^2\Omega\sin\Omega t\cos\Omega t\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e}_y\\ &\quad+\rho^2\Omega\cos^2\Omega t\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e}_x\end{aligned}$$

一周期で平均すると、$\overline{\sin\Omega t\cos\Omega t} = 0$, $\overline{\cos^2\Omega t} = 1/2$ より、

$$\overline{\vec{v} \times (\vec{\rho}\cdot\nabla)\vec{B}} = \frac{\rho^2\Omega}{2}\frac{\partial B_z}{\partial x}\vec{e}_x = \frac{\rho^2\Omega}{2}\nabla B = \frac{v_\perp^2}{2\Omega}\nabla B = -\frac{mv_\perp^2/2}{qB}\nabla B \tag{39}$$

となり、この力による ∇B ドリフト (grad. B drift)$\vec{u}_{\nabla B}$ は

$$\vec{u}_{\nabla B} = \frac{\frac{v_\perp^2}{2}\nabla B \times \vec{B}}{\Omega B^2} \tag{40}$$

となる。

- **曲率ドリフトと ∇B ドリフトを合わせた表現 (unified expression of curvature and grad. B drift)**
  磁場は発散が $0(\nabla \cdot \vec{B}=0)$ であるから真空中 (vacuum) では、磁力線に曲率 (curvature) があることと磁場強度 (magnetic field strength) に勾配があることは同値である。
  ベクトル公式 (vector calculation)
  $$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} + \vec{a}\times(\nabla\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a}) \tag{41}$$
  を用いると
  $$\frac{1}{2}\nabla(B^2) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{B}) \tag{42}$$
  となる。静磁場 (magnetostatic field)、真空 ($\vec{j}=0$) では $\nabla\times\vec{B}=0$ であるので、第二項は消えて $\frac{1}{2}\nabla(B^2) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}$ となる。この両辺を B で割ると
  $$\frac{1}{B}\frac{1}{2}\nabla(B^2) \quad (=\nabla B) \quad = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{B} \tag{43}$$
  ここで $\vec{b}$ は $\vec{B}$ の方向を表す
  $$\nabla B = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{B} = \vec{b}\left((\vec{b}\cdot\nabla)B\right) + B(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{b} = \frac{\partial B}{\partial l}\vec{b} - \frac{B}{R}\vec{n} \tag{44}$$
  となる。ここで l は磁力線に沿う座標 (coordinate along a field line)、R は曲率半径 (curvature radius)、$\vec{n}$ は法線ベクトル (normal vector) である。したがって、$\nabla B\times\vec{B} = -B\frac{\vec{n}}{R}\times\vec{B}$ となり、∇B ドリフトを
  $$\vec{u}_{\nabla B} = -\frac{\frac{v_\perp^2}{2}\frac{\vec{n}}{R}\times\vec{B}}{\Omega B} \tag{45}$$
  と表すことができる。曲率ドリフト $\vec{u}_{curv} = \frac{\vec{B}\times\frac{{v_\parallel}^2}{R}\vec{n}}{\Omega B}$ と併せて表現すると
  $$\vec{u}_{\nabla B} + \vec{u}_{curve} = \frac{\vec{B}\times(v_\perp^2/2 + v_\parallel^2)\frac{\vec{n}}{R}}{\Omega B} \tag{46}$$

- ミラー捕捉（$\nabla B \parallel \vec{B}$ の場合）(mirror trap)
  $\vec{B}\parallel\vec{e}_z$, $\quad \frac{\partial B_z}{\partial z}\neq 0$ の場合を考える。$\nabla\cdot\vec{B}=0$ より、$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0$。従って、$\frac{\partial B_z}{\partial z}\neq 0$ であれば、$\frac{\partial B_x}{\partial x}\neq 0 \quad$ and/or $\quad \frac{\partial B_y}{\partial y}\neq 0$ となる。ここでは、$\frac{\partial B_x}{\partial x}\neq 0$, $\frac{\partial B_y}{\partial y}\neq 0$, $\frac{\partial B_z}{\partial x}=\frac{\partial B_y}{\partial x}=\cdots=0$ とする。∇B ドリフト (grad. B drift) を考えた時と同様に、１次の磁場変動を用いると、運動方程式 (equation of motion) は
  $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\times\vec{B}_0 + q\vec{v}\times(\vec{\rho}\cdot\nabla)\vec{B} \tag{47}$$
  となる。この第二項の z 成分 (z component) は
  $$\left(\vec{v}\times(\vec{\rho}\cdot\nabla)\vec{B}\right)_z = v_x(\vec{\rho}\cdot\nabla)B_y - v_y(\vec{\rho}\cdot\nabla)B_x \tag{48}$$
  となる。0 次の軌道 (0th order orbit)$\vec{\rho}$ を用いて一周期で平均 (averaging over one period) すると、この項は
  $$\overline{\left(\vec{v}\times(\vec{\rho}\cdot\nabla)\vec{B}\right)_z} = -\frac{\rho^2\Omega}{2}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}\right) = \frac{\rho^2\Omega}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{49}$$

となる。よって、z 方向の運動方程式 (equation of motion) は

$$m\frac{dv_\parallel}{dt} = q\frac{\rho^2\Omega}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{mv_\perp^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial l}, \quad (ここで、v_\perp = |\rho\Omega|) \tag{50}$$

となり、この加速度 (acceleration) により、磁場が強くなる方へ進む粒子を減速する。

2.3 ミラー配位と断熱不変量 (mirror configuration and adiabatic invariant)

磁力線に沿って、磁場の強い点があると、弱い磁場から走ってきた粒子は、磁場の強い点の近傍で跳ね返される。これをミラー磁場 (mirror field)、ミラー配位 (mirror configuration) という。実験室プラズマに用いられるだけでなく、地磁気圏 (magnetosphere)（双極子磁場 (dipole field)）の一部分もミラー磁場を構成する。

- 磁気モーメント (magnetic moment)
  周期運動 (periodic motion) するときに、その周期に比べて場がゆっくり変化するとき、位相空間での軌道の面積 $\oint pdq$ は保存される。これを断熱不変量 (adiabatic invariant) という。サイクロトロン運動 (cyclotron motion) における磁気モーメント (magnetic moment)μ は断熱不変量であり

$$\begin{aligned}\mu = IS = \frac{q|\Omega|}{2\pi}\pi\rho^2 = \frac{mv_\perp^2/2}{B}\\ = \frac{q}{4\pi m}\oint pdq = const.\end{aligned} \tag{51}$$

  と表される。ここで I は電流 (current)、S は電流の囲む面積 (area encircled by the current) である。
- ミラー配位による閉じ込め (confinement in mirror configuration)
  両端で磁場が強いミラー磁場内での粒子の運動を考える。これは二つのコイルを同軸 (coaxial two coils) に配置することで実現できる。$E = 0$ とし、磁力線に沿って運動する粒子を考える。エネルギー保存 (conservation of energy)

$$v_\parallel^2 + v_\perp^2 = const. \tag{52}$$

  が成立する。磁場（ローレンツ力 (Lorentz force)）は仕事をしないことに注意。二つの場所 $z = z_0$, $z = z_1$ での磁場の大きさを B_0, B_1，そのときの速さを $v_{\parallel 0}$, $v_{\perp 0}$, $v_{\parallel 1}$, $v_{\perp 1}$, とすると式 (51,52) から

$$\begin{aligned}0 < v_{\parallel 1}^2 = v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2 - v_{\perp 1}^2 = v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2\left(1 - \frac{B_1}{B_0}\right)\\ \to \frac{v_{\parallel 0}^2}{v_{\perp 0}^2} > \frac{B_1}{B_0} - 1\\ \to \frac{v_0^2}{v_{\perp 0}^2} > \frac{B_1}{B_0}\end{aligned} \tag{53}$$

  となる。磁力線上の磁場の最大値 (maximum) を B_1 とした時

$$\frac{v_0^2}{v_{\perp 0}^2} < \frac{B_1}{B_0} \tag{54}$$

  の粒子は B_1 まで到達できず、B_0 を含む磁場の弱い領域に閉じ込められる。すなわち、十分強い磁場 B_1 を持つミラー磁場 (mirror field) を用いることによりプラズマをほぼ閉じ込める (confinement of plasma) ことができる。ただし、$\frac{v_0^2}{v_{\perp 0}^2} > \frac{B_1}{B_0}$ である粒子は、磁場が最も強い所（$B = B_1$）でも $v_\parallel$ の符

号は変わらず、この場所を通り抜けて外へ逃げることができる。このような粒子は速度空間上で円錐状の領域 (cone region) に存在し、これをロスコーン (loss cone) と呼ぶ。
ミラー磁場中の粒子が磁力線方向に受ける力、式 (50) は

$$q\vec{v} \times (\vec{\rho} \cdot \nabla)\vec{B} = -\mu \frac{\partial B}{\partial l} \tag{55}$$

となり，磁場の弱い方向へ復元力 (restoring force) を受け、振動 (oscillation) することがわかる。

- フェルミ加速 (Fermi acceleration)
  ミラー磁場内に閉じ込められた粒子の振動運動を周期運動 (periodic oscillation motion) と考えると、（縦の）断熱不変量 (longitudinal adiabatic invariant)

$$\oint m v_{\parallel} dl \sim 2 m v_{\parallel} l \tag{56}$$

  が保存される。ミラー磁場の両端がゆっくり近づくと $v_{\parallel}$ が増加すると予想される。これをフェルミ加速と呼び，宇宙線 (cosmic ray) の加速機構 (acceleration mechanism) の一つと考えられている。

2.4 種々の磁場配位と粒子軌道 (Various magnetic configuration and particle orbit)

高温プラズマを生成し、ある領域に閉じ込めておく (confinement) ためには、粒子の軌道がその領域内で閉じていなければならない。磁場があると磁力線に垂直方向にはラーマ半径 (Larmor radius) の大きさに閉じ込めることが可能である。

磁力線方向に閉じ込めるためには、ミラー磁場 (Mirror field) が有用である。粒子の電荷の符号が決まっていれば磁場方向の復元力 (restoring force)（式 (55)）のかわりに電場 $E_{\parallel}$ を用いることが可能である。この方式をペニングトラップ (Penning Trap) と呼ぶ。これが有効であるためには、デバイ長 λ_D が十分長く電場が遮蔽されないことが必要であり、非中性プラズマ (non-neutral plasma)、あるいは少数荷電粒子 (small number of charged particles) の閉じ込めに用いられる。以下では、磁力線自身が閉じる (closed field line) 場合を考える。

- 磁気面と対称性 (magnetic surface and symmetry)
  磁力線の方向 (direction of a field line)(dx, dy, dz) は

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \tag{57}$$

  で表される。磁力線群 (bunch of field lines) が面 (surface) をなすとき、これを磁気面 (magnetic surface, magnetic flux surface) という。あるスカラー関数 (scalar function)$\Psi(\vec{r})$ が $\nabla\Psi \cdot \vec{B} = 0$ を満たすとき，磁気面上で $\Psi = const.$ となる。すなわち、Ψ で磁気面 (magnetic surface) を表すことができる。$\vec{B}$ と Ψ は流体力学 (hydrodynamics) における流線 (streamline) と流れ関数（stream function）に対応する。
  円柱座標 (cylindrical coordinate) では，磁場は $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ より

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ B_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{58}$$

となる。

– 移動対称性（並進対称性）(translational symmetry) を持つとき
  場が z に依存せず，移動対称性（並進対称性）(translational symmetry) を持つとき $\partial/\partial z = 0$。式 (58) より

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} \\ B_\theta &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{59}$$

  $\Psi = A_z(r,\theta)$ とすると、$\nabla\Psi \cdot \vec{B} = 0$ より、$\Psi = A_z(r,\theta) = const.$ は磁気面 (magnetic surface) を表す。

– 軸対称性（回転対称性）(axial symmetry, rotational symmetry) を持つとき
  場が θ に依存せず、軸対称性（回転対称性）(axial symmetery, rotational symmetry) を持つとき $\partial/\partial\theta = 0$。式 (58) より

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ B_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ B_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) \end{aligned} \tag{60}$$

  となる。$\Psi = rA_\theta(r,z) = const.$ は磁気面 (magnetic surface) を表す。この時 $\Psi = rA_\theta(r,z)$ は磁束を表すことに注意。

$$\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}dS = \int_S \nabla\times\vec{A}\cdot\vec{n}dS = \oint \vec{A}\cdot\vec{ds} = 2\pi rA_\theta = 2\pi\Psi \tag{61}$$

  $\Psi = rA_\theta(r,z)$ を用いると、式 (60) より、

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z} \\ B_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \end{aligned} \tag{62}$$

  となる。

- 線電流磁場 (infinite straight current)
  一般に

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}}{|\vec{r'} - \vec{r}|}dV' \tag{63}$$

  である。無限に長い線電流 (current)I が、半径 (radius)r の位置に作る $\vec{A}(A_z)$ は

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{1}{|\vec{r'} - \vec{r}|}dz' = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r \tag{64}$$

  となる。対称性 $\partial/\partial\theta = \partial/\partial z = 0$ より

$$B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{65}$$

  移動対称性から、$A_z = const.$、すなわち $r = const.$ は磁気面 (magnetic surface) を表す。

- 単純トーラス磁場 (simple torus)
電流 I の円形コイルを並べたソレノイドはアンペールの法則 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$ により

$$B = \mu_0 I n \tag{66}$$

の磁場を作る。ただし，n は単位長さ当たりのコイル数 (number of coils per unit length)。このコイルを環状（トーラス状）(torus) に並べると閉じた環状の磁力線群を作ることができる。トーラスの中心からの半径を R とすると，磁場は

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \tag{67}$$

ただし，I は総電流 (total current)。
この磁場は $1/R$ の非一様性 (1/R dependence) をもつので，粒子はドリフト (drift) $\vec{u}_{\nabla B}$, $\vec{u}_{curv}$ をして，上下（トーラスの軸方向）に移動する (movement along the axis of symmetry)。このドリフトは電荷の符号 (polarity of charge) に依存するので，プラズマは上下方向に荷電分離 (charge separation) を起こし、電場 (electric field) が生成される。この電場により粒子はトーラス外向きの $E\times B$ ドリフトを起こす。このドリフトは外向き (outward) で電荷の符号に依存しない。従ってプラズマ全体として外向きに移動し真空容器などにあたって消滅する。

- 双極子磁場 (dipole field)
電流 I 半径 a の円環電流 (annular current) が (r,z) に作るベクトルポテンシャル A は

$$\begin{aligned} A_\theta &= \frac{\mu_0}{\pi k} I \sqrt{\frac{a}{r}} \left(\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right) \\ k^2 &\equiv \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2} \end{aligned} \tag{68}$$

と書ける。ただし，$K(k)$, $E(k)$ は第 1 種，第 2 種完全楕円積分 (complete elliptic integral of the first kind and the second kind)。軸対称 (axial symmetry) なので $rA_\theta = const.$ は磁気面 (magnetic surface) を表す。円環電流のごく近傍では (near the current)，線電流の作る磁気面 $(r-a)^2 + z^2 = const.$ に漸近し，遠方 ($k \ll 1$, $r, z \gg a$) では，双極子 $I\pi a^2$ のベクトルポテンシャル

$$rA_\theta \sim \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}} \tag{69}$$

に漸近する。この時磁場は r^{-3} または z^{-3} で小さくなる。
地磁気 (earth magnetism) は双極子磁場 (dipole field) の例である。この磁場中で粒子は北極，南極 (south and north poles) を結ぶミラー磁場内 (mirror field) で往復運動するとともに，東西にドリフト（$\vec{u}_{\nabla B}$, $\vec{u}_{curv}$）する。
円環電流の近傍では，電流を取り巻く磁気面が存在し，軸方向に磁場を加えると様々な形の磁気面が構成される。一様な軸方向磁場（垂直磁場）$B_\perp$ は $rA_\theta = \frac{r^2}{2} B_\perp$ で与えられることに注意。

- トーラス磁場 (torus field)
単純トーラスの真中に円環電流 (simple torus + annular current)，軸方向磁場（垂直磁場）(axial field, vertical field) が存在する場合を考える。この系は軸対称 (axial symmetry) であるので，$\Psi = rA_\theta$ が磁気面 (magnetic surface) を表す。代表的な磁場閉じ込め装置であるトカマク（tokamak）では，プラズマ自身が円環電流を持つ。磁力線は円環（磁気軸）の周りをまわると共に θ 方向（あるいは ϕ 方向、トロイダル方向と呼ぶ）にまわる。これらの磁場を B_ϕ, B_p と記す。粒子軌道は磁力線 (B_ϕ, B_p) に沿う

運動と不均一磁場 ($B_\phi \propto 1/R$) によるドリフト $\vec{u}_{\nabla B}$, $\vec{u}_{curv}$ で近似できる。磁気面は磁気軸 (magnetic axis) を取り囲む同心円 (coaxial circles) であると近似できる。この時の磁気軸近傍の粒子軌道を考える。

– 非捕捉粒子 (untrapped particle)

磁気軸の周りの回転周波数 (rotational frequency) を ω とすると、運動方程式 (Eq. of motion) は

$$\frac{dr}{dt} = -\omega z$$

$$\frac{dz}{dt} = \omega r + v_d \tag{70}$$

$$v_d = \frac{m}{qB_0R}\left(\frac{v_\perp^2}{2} + v_\parallel^2\right) \tag{71}$$

となる。ただし，R, B_0 は磁気軸の半径とそこでのトロイダル磁場を表す。磁気軸近傍 (near the magnetic axis) を考えると，$v_d \approx const.$, $\omega \approx const.$ と近似でき、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(r + \frac{v_d}{\omega}\right) = -\omega z$$

$$\frac{dz}{dt} = \omega\left(r + \frac{v_d}{\omega}\right) \tag{72}$$

$$\tag{73}$$

となり、粒子軌道は磁気面から内側または外側にシフトした円 (inboard or outboard shifted circle)

$$(r + v_d/\omega)^2 + z^2 = const. \tag{74}$$

を描く。シフトの向きは ω の符号と v_d の向き（符号）に依存する。

– 捕捉粒子 (trapped particle)

式 (74) の円軌道の半径 (radius) を a とすると円の内外でのトロイダル磁場の変化は $\Delta B/B_0 \sim a/R$ となるので，粒子は内側に行くに従って強い磁場を感じる。このミラー配位 (mirror configuration) により，平行方向の速さの遅い粒子 (particles with slow parallel velocity components) は磁場の弱い外側に捕捉される (trapped at the outboard weak field side)。式 (54) から、この条件は

$$\frac{v_\parallel^2}{v_\perp^2} < \frac{a}{R} \tag{75}$$

となる。また、この軌道は形からバナナ軌道 (banana orbit) と呼ばれる。バナナの幅 (width) は、非捕捉粒子の円軌道のシフト量である v_d/ω 程度である。

3 衝突と拡散 (Collison and diffusion)

単一粒子の軌道は磁力線と磁力線に垂直なドリフトで決まる。実際のプラズマは粒子の集合であり、粒子間の衝突 (collision between particles) が起きる。ここでは、衝突時間 (collision time) がどのように表されるかを直感的に導く（厳密な取り扱いはしない）。衝突が引き起こす現象として、プラズマの電気抵抗 (electrical resistivity) を示す。衝突が起きると、粒子は単一粒子軌道からずれて、拡散を引き起こす。拡散と衝突の関係について学ぶ。

3.1 衝突時間 (Collision time)

最初に電子がイオンと衝突する場合を考える。Sec. 1.4 で説明したように、電子の持つ運動エネルギーとクーロンポテンシャルが同程度となるときに、電子の軌道は大きく曲げられることから衝突断面積 (crosssection) や衝突時間 (collision time) を求めることができ、衝突時間 τ_{ei} は,

$$\tau_{ei} = \frac{1}{n\sigma v_e} \sim \frac{\epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3}{nZ^2 e^4} \sim \frac{\epsilon_0^2 \sqrt{m_e}(kT_e)^{3/2}}{nZ^2 e^4} \tag{76}$$

となる。電子同士の衝突時間 (electron-electron collision time) は、上式の質量電荷依存性から、イオンの荷数 Z に対する依存性を無視すると

$$\tau_{ee} \sim \tau_{ei} \tag{77}$$

となる。同様に考えるとイオン-イオンの衝突時間 (ion-ion collision time) は

$$\tau_{ii} =\sim \frac{\epsilon_0^2 m_i^2 v_i^3}{nZ^4 e^4} \sim \frac{\epsilon_0^2 \sqrt{m_i}(kT_i)^{3/2}}{nZ^4 e^4} \tag{78}$$

となる。

これまでは、軌道が大きく曲がる変化、すなわち運動量の変化の衝突時間 (collision time from the view point of momentum exchange) を考えていたが、次にエネルギーをやり取りする衝突時間 (collision time from the view point of energy exchange)τ_E を考える。同じ種類の粒子の場合、例えば電子同士であれば、玉つき衝突 (chain collision) の場合は、２つの粒子がエネルギーを交換するので、運動量の衝突時間と、エネルギーのやり取りで定義される衝突時間 τ_E は同程度である。すなわち、$\tau_{ee} \sim \tau_{eeE}$、$\tau_{ii} \sim \tau_{iiE}$。一方、質量が大きく異なる粒子の衝突の場合は、壁で跳ね返るボール (recoil ball at a wall) のように、一度の衝突で、運動量が大きく変化しても、エネルギーはほとんど変わらず、エネルギーをやり取りする衝突時間は、かなり長いと予想される。以下では、電子とイオンがエネルギーをやり取りする衝突時間 τ_{eiE} を考える。この時、電子、イオンの平均エネルギー (mean energy) は同程度で $kT_e \sim kT_i$ とする。

電子の速度を v_e ($\sim \sqrt{kT_e/m_e}$)、イオンと衝突した時の電子の速さの変化を δv_e とする。ここで方向と符号は無視し、符号なしスカラー (unsigned scalar) で考える。電子の速さの変化 δv_e は、相手が電子でもイオンでも壁でも同程度である。電子のエネルギーは $\epsilon_e \sim m_e v_e^2$ であり、電子電子の衝突 (electron-electron collision) でやり取りするエネルギーは $\delta\epsilon_{ee} \sim m_e v_e \delta v_e$ である。一方、電子とイオンの衝突では運動量が保存するので、$m_e \delta v_e \sim m_i \delta v_i$ となる。これより、イオンのエネルギー変化は、$\delta\epsilon_{i_e} \sim m_i v_i \delta v_i \sim v_i m_e \delta v_e$ となる。ここで、$kT_e \sim kT_i$ より、速度を熱速度で代表させると $v_i \sim \sqrt{m_e/m_i} v_e$ となる。以上より、$\delta\epsilon_{ie} \sim \sqrt{m_e/m_i}\delta\epsilon_{ee}$ となる。$\delta\epsilon_{ie} \ll \delta\epsilon_{ee}$ より、エネルギーを交換するためには、何度も衝突しなければならないことが分かる。これを微小幅 $\sqrt{m_e/m_i}\delta\epsilon_{ee}$ の積算 (accumulation of small steps) が $\delta\epsilon_{ee}$ ($\sim \delta\epsilon_{ii}$) に達するランダムウォークと考える。ランダムウォークの性質から、このためには、$\sqrt{m_e/m_i}$ の二乗 (square) だけ衝突回数が必要であり、その結果 $\tau_{ieE} \sim (m_i/m_e)\tau_{eeE}$ となる。

衝突時間の比をまとめると

$$\tau_{ee} : \tau_{ei} : \tau_{ii} : \tau_{eiE} : \tau_{ie} = 1 : 1 : \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} : \frac{m_i}{m_e} : \frac{m_i}{m_e} \tag{79}$$

となる。なお、最後の τ_{ie} はイオンが電子と衝突し、イオンの運動量が大きく変化する時間である。

3.2 電気抵抗 (electrical resistivity)

電流は主として電子が担う。衝突時間 τ_{ei} の間に電子が電場 E で加速されて得る速度は

$$\begin{aligned} m_e v_e &= -eE\tau_{ei} \\ \rightarrow \quad v_e &= -\frac{eE}{m_e}\tau_{ei} \end{aligned} \tag{80}$$

となる。衝突によって、電子は減速され、速度が 0 になると仮定する。衝突後、電子は再び加速され、式 (80) の v_e を得る。この過程の繰り返しが定常状態 (steady state) で起きているとすると、電子の平均的な速度 (mean electron velocity) はこの v_e 程度となる。一方、抵抗率の定義 (definition of the resistivity) から $E = \eta j = -\eta e n v_e$ となる。この v_e に式 (80) を代入すると抵抗率は

$$\eta \sim \frac{m_e}{ne^2\tau_{ei}} \tag{81}$$

となる。τ_{ei} に式 (76) を代入すると

$$\eta \sim \frac{Z^2e^3}{\epsilon_0^2 m_e v_e^3} \propto (kT_e)^{-3/2} \tag{82}$$

となる。最後の式変形で熱速度 $v_e \sim \sqrt{kT_e/m_e}$ を用いた。より厳密な計算結果では

$$\eta \sim \frac{Ze^2 \ln\Lambda}{51.6\sqrt{\pi}\epsilon_0^2 m_e v_e^3} \tag{83}$$

となる。たとえば、1 keV の温度のプラズマの電気抵抗はアルミと同程度なる。このことは、高温プラズマは良導体であり、大きな電流が簡単に流れること、電流が磁場を生成し、プラズマの振る舞いが大きく影響され得ることが分かる。
η の密度依存性は、$j = -nev_e$ と $\tau = 1/(n\sigma v_e)$ で打ち消されることに注意。

3.3 拡散とランダムウォーク (Diffusion and random walk)

粒子束 Γ が密度勾配 ∇n に比例し

$$\vec{\Gamma} = -D\nabla n \tag{84}$$

と書けるとき，D [m^2/s] を拡散係数と呼ぶ。この経験則をフィックの法則 (Fick's law of diffusion) と呼ぶ。以下では、拡散とランダムウォーク (diffusion and random walk) の関係を考える。

- 拡散方程式とその解 (diffusion Eq. and its solution)
  粒子の拡散 (particle diffusion) を考える。
  $n(x,t)dx$：時刻 t での $x \sim x + dx$ にある粒子数とする。連続の式

  $$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Gamma} = 0 \tag{85}$$

  とフィックの法則から１次元拡散方程式 (1-dimensional diffusion Eq.)

  $$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \tag{86}$$

が導かれる。$t=0$ で $n=\delta(x)$ を初期条件 (initial condition) に持つ解は

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{87}$$

である。この分布のピークの高さは $1/\sqrt{Dt}$ に比例し時間と共に減少する。一方、分布の幅は $\sqrt{Dt}$ に比例して増加する。これは、粒子が徐々に広がり、拡散していくことを表す。

- １次元ランダムウォークの確率 (probability in 1-dimensional random walk)
  空間・時間を離散的 (discrete space and time) にとり，確率を考える。$W(l,n)$：n ステップ後に l の位置に来る確率は,

$$W(l,n) = \ {}_nC_{\frac{n+l}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tag{88}$$

$$= \frac{n!}{((n+l)/2)!\,((n-l)/2)!} \tag{89}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \exp\left(-\frac{l^2}{2n}\right) \quad (n \gg |l| \gg 1) \tag{90}$$

- ランダムウォークの連続化 (Continuous version of random walk)
  空間・時間の連続化 (make space and time continuous)

$$x = la, \quad t = n\tau \tag{91}$$

とすると，確率は

$$W(l,n)\Delta x = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)\Delta x \tag{92}$$

ただし、

$$D = \frac{a^2}{2\tau} \quad = \frac{[L]^2}{[T]} \tag{93}$$

この表式を衝突拡散 (collisional diffusion) に適用できる。この場合、a は１回の衝突での変位 (displacement) であり、τ は衝突時間 (collision time) である。

3.4 拡散係数と閉じ込め時間 (Diffusion coefficient and confinement time)

プラズマ中の粒子 (particle) は衝突により拡散し (collisional diffusion)、元の軌道からずれていく。従って、装置の大きさ a が与えられると、プラズマが拡散し、装置の壁にあたって消滅する時間（閉じ込め時間 (confinement time)τ_p）が決まる。Sec.3.3 から拡散係数 (diffusion coefficient)D は衝突時のステップ幅 (step size)Δx と衝突時間 (collision time)Δt から $D = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$ で評価される。ランダムウォーク (random walk) において距離 a にまで広がる時間は $a \sim \sqrt{2D\tau_p}$ で与えられるので、閉じ込め時間 (confinement time) は

$$\tau_p \sim \frac{a^2}{2D} \sim \left(\frac{a}{\Delta x}\right)^2 \Delta t \tag{94}$$

となり、装置サイズ/ステップ幅の比の二乗 (squared ratio (device size/step size)^2) に衝突時間をかけたものとなる。すなわち、装置サイズが大きいほど、衝突時間が長いほど閉じ込め時間は長くなる。

- プラズマ中の拡散 (diffusion in plasma)
磁場がないとき、または磁力線に沿う拡散を考える。例えば、Q-machine と呼ばれる $T_i = 0.2\,\mathrm{eV}$, $n_i = 10^{17}\mathrm{m}^{-3}$ のプラズマでの閉じ込め時間を評価する。イオンイオン衝突 (ion-ion collision) の平均自由行程 (mean free path)、衝突時間 (collision time) は

$$\lambda_{ii} = 1 \times 10^{-4} T_i^2/n_i \sim 4\mathrm{mm}$$
$$1/\nu_{ii} = \left(0.2 \times 10^9 Z^4/\sqrt{A} T_i^{3/2} n_i\right)^{-1} \sim 0.5\,\mu\mathrm{s}$$

装置の磁力線方向の長さが $a = 1\mathrm{m}$ であるとすると、閉じ込め時間は、

$$\tau_p \sim \left(\frac{a}{\Delta x}\right)^2 \Delta t \sim 30 \text{ ms} \tag{95}$$

となる。この閉じ込め時間は，$\tau_p \propto n_i T_i^{-5/2}$ と温度の急激な減少関数になっているため、高温のプラズマでは、磁力線（あるいは粒子軌道）を閉じさせなければ、閉じ込めが難しくなる。また，閉じ込め時間が短くても，プラズマ生成量（スピード）が十分大きければ、プラズマを定常的に維持できる。

- 磁力線に垂直な閉じ込め (perpendicular diffusion)
高温のプラズマでは，磁力線（及び粒子軌道）を閉じさせることにより、よい閉じ込めを実現している。しかしながら、衝突により磁力線に垂直方向には拡散していく。衝突には、イオン-イオン、電子-電子、イオン-電子が考えられる。以下に示すように、このうち前２者では、衝突前後で (before and after the collision) ２つの粒子の案内中心の重心は移動しない。サイクロトロン運動を行っている粒子から見た時のサイクロトロン運動の中心（案内中心 (guiding center)）の位置は

$$\vec{\rho} = \frac{m}{qB^2}\vec{v} \times \vec{B} \tag{96}$$

で表される。衝突二つの粒子の衝突地点を原点 (origin) とすると、衝突直前、直後の二つの粒子の重心 (center of mass) は

$$m_1\vec{\rho_1} + m_2\vec{\rho_2} = \frac{1}{qB^2}\left(m_1^2\vec{v_1} + m_2^2\vec{v_2}\right) \times \vec{B} \tag{97}$$

同種粒子 (identical particles) であれば、質量が同じで $m_1 = m_2$（電荷 q も同じ）。また、衝突前後で運動量が保存されるので $m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$。以上より二つの粒子の重心 $m_1\vec{\rho_1} + m_2\vec{\rho_2}$ は保存される。
一方、イオン-電子の衝突 (ion-electron collision) では，電子だけでなく、イオンも電子のラーマ半径 ρ_e(electron Larmor radius) 程度重心がずれる。その結果生じる拡散係数 (diffusion coefficient) は、

$$D = \frac{\rho_e^2}{\tau_{ei}} \propto \frac{n}{B^2\sqrt{kT}} \tag{98}$$

従って、温度が上がると、衝突頻度が小さくなり、拡散係数は小さくなる。また、磁場が強ければラーマ半径が小さくなり、拡散係数は小さくなる。
実際に、温度が上がるとプラズマの不安定性に起因する拡散（輸送）が激しくなり、必ずしも上式のようにはならない。

- バナナ軌道による拡散 (diffusion by banana orbit)
トーラス磁場において, 衝突頻度が小さいと, 粒子はバナナ軌道を描く。このような状況では，１回の衝突で，バナナ軌道 (banana orbit) は，バナナの幅 (width) 程度移動する。この時の拡散係数 (diffusion coefficient) は，式 (98) の ρ_e をバナナの幅に置き換えたもの $\times factor$ となる。

バナナの幅 (banana width)Δ は，式 (74) から

$$\Delta \sim \frac{v_d}{\omega} \sim \frac{mv^2}{eBR}\frac{1}{\omega} \tag{99}$$

また磁気軸からバナナ軌道までの半径を a とすると ω は磁力線の傾きと a と磁力線方向の速さで決まる。トーラスのトロイダル方向に $2\pi Rq$ だけ進んだときにポロイダル方向に 1 周するとして無次元数 q を定義すると

$$\omega \sim \frac{v}{Rq} \tag{100}$$

となる。これを用いるとバナナの幅は

$$\Delta \sim \frac{mv^2}{eBR}\frac{Rq}{v} \sim \frac{m}{eB}vq \sim \rho q \tag{101}$$

従って，バナナ軌道による拡散係数は磁力線に垂直な拡散係数に比べて無次元数 q^2 だけ大きくなる。

4 電磁流体としてのプラズマ (Plasma as a electromagnetic fluid)

粒子系 (particle system) の扱い方には３通り (three approaches) が考えられる。

- 全粒子 (All particle)
  N 個の粒子がある場合に、それぞれの座標、運動量 (position and momentum) を 6N 次元の位相空間 (6N-dimensional phase space) で表現する。粒子シミュレーション (particle simulation) ではこのように扱うが、解析的にはこのような取扱いはあまり行われない。
- ボルツマン方程式 (Boltzmann Eq.)
  座標と速度の分布関数 (distribution function)$f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ として、粒子系を位相空間内の流体 (fluid) として表現し、その時間発展 (time evolution) を

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla f + \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot\nabla_v f = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c \tag{102}$$

  で表す。左辺は位相空間でのラグランジュ微分 (Lagrangian derivative) となっていることに注意。これをボルツマン方程式 (Boltzmann Eq.) とよび、これを解く。
- 流体方程式 (fluid Eq.)
  速度の情報を積分して落とす (integration over velocity space)。
  密度 (density) は $n(\vec{x}) = \int f d\vec{v}$,
  速度の１次のモーメント (1st order moment) は $nm\vec{v} = \int m\vec{v}d\vec{v}$,
  速度の２次のモーメント (2nd order moment) は $\frac{3}{2}nkT = \int mv^2/2d\vec{v}$,
  のようにして取り扱う。すなわち，速度の３次以上のモーメントは無視する。

ここでは、電子、イオンの二流体方程式 (Two fluid eqs.) からプラズマを一流体 (single fluid) として扱う電磁流体方程式 (magnetohydrodynamic Eq.) を導く。

4.1 電磁流体方程式 (magnetohydrodynamic Eq.)

最初にイオン (ion) と電子 (electron) を別々に扱う。電子密度 (electron density) 、イオン密度 (ion density) に関する連続の式は (Eq. of continuity)

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e v_e) = 0$$
$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i v_i) = 0 \tag{103}$$

運動方程式 (Eq. of motion) は

$$n_e m_e \left(\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e \right) = -\nabla p_e - e n_e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) + \vec{R} \tag{104}$$

$$n_i m_i \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i \right) = -\nabla p_i + Z e n_i (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) - \vec{R} \tag{105}$$

ただし、$R = e n_e \eta \vec{j}$ はイオン-電子間の衝突による抵抗 (drag due to ion-electron collision) を表す。次に１流体 (one fluid) での量を考える。１流体として考えた時質量で平均した密度 (density)、速度 (velocity) は

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i$$
$$\vec{v} = \frac{1}{\rho_m} (n_e m_e \vec{v}_e + n_i m_i \vec{v}_i) \tag{106}$$

また、電荷で平均した電荷密度 (charge density)、電流密度 (current density) は

$$\rho = -e n_e + Z e n_i$$
$$\vec{j} = -e n_e \vec{v}_e + Z e n_i \vec{v}_i \tag{107}$$

２流体の式 (two fluid eqs.)(103, 104,105) から１流体 (one fluid) でも同様の式

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$
$$\rho_m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + n_e m_e (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e + n_i m_i (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i = -\nabla p + \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \tag{108}$$

が成立する。イオン (ion) の方が質量が重いので、プラズマ中の運動量 (momentum) はほぼイオン (ion) が担う。すなわち $\vec{v} \sim \vec{v}_i$。反対に電子 (electron) の方が速いので、プラズマ中の電流 (current) はほぼ電子が担う。また、準中性条件 (quasi neutrality)$e n_e \sim Z e n_i$ を用いると $\vec{j} \sim -e n_e (\vec{v}_e - \vec{v}_i) \sim -e n_e (\vec{v}_e - \vec{v})$。これから、電子の速度は $\vec{v}_e = \vec{v} - \vec{j}/e n_e$

式 (104) において電子の慣性（電子の質量）(electron inertia, mass) を無視できるとすると（電子サイクロトロン周波数よりもゆっくりした現象 (phenomenon slower than electron cyclotron frequency) を扱うとい

う仮定に相当する）

$$\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}-\frac{\vec{j}}{en_e}\times\vec{B}+\frac{\nabla p_e}{en_e}-\frac{\vec{R}}{en_e}=0 \tag{109}$$

さらに、準中性条件 (quasi neutrality)$\rho \ll en_e$，イオンサイクロトロン周波数よりもゆっくりした現象 (phenomenon slower than ion cyclotron frequency) を扱うとすると

$$\frac{\vec{j}}{en_e}\times\vec{B}-\frac{\nabla p_e}{en_e}=\rho_m\frac{Dv}{Dt}+\frac{\nabla p_i}{en_e}-\rho\vec{E}\ll\vec{v}\times\vec{B}$$

となる。この時電子の運動方程式 (Eq. of electron motion)(109) は

$$\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}=\eta\vec{j} \tag{110}$$

これは、電流 (current) と電場 (electric field) の関係を表し、オームの式 (Ohm's law) と呼ばれる。$\vec{v}\times\vec{B}$ は動いている系からみた誘導電場 (inductive field in moving frame) を表していることに注意。

4.2 MHD 方程式のまとめ (summary of MHD Eqs.)

これまでの電磁流体方程式（Magnetohydrodynamic (MHD) Equation）を整理すると

$$\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}=\eta\vec{j} \tag{111}$$

$$\rho_m\frac{D\vec{v}}{Dt}=-\nabla p+\vec{j}\times\vec{B} \tag{112}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j} \tag{113}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{114}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{115}$$

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_m\vec{v}) \tag{116}$$

この方程式は，ゆっくりとした変動 (slow phenomena) しか取り扱えない，プラズマ振動のように中性からのずれが本質的な現象を扱うことができない。

MHD 方程式の特徴的な速さのスケール (typical velocity in MHD Eqs.) を求めるために，式 (112,113) の次元解析 (dimensional analysis) を行うとアルフベン速度 (Alfven velocity)

$$v_A=\frac{B}{\sqrt{\mu_0\rho_m}} \tag{117}$$

が得られる。これは、後述する（磁気）音波 (magneto sonic wave) の速度を表す。

4.3 抵抗の役割と磁力線の凍結 (role of resistivity and frozen-in magnetic field)

式 (111,113) から

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}&=-\nabla\times\vec{E}=-\nabla\times\eta\vec{j}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})=-\frac{\eta}{\mu_0}\nabla\times(\nabla\times\vec{B})+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})\\&=\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})+\frac{\eta}{\mu_0}\nabla^2\vec{B}\end{aligned} \tag{118}$$

ここで、$\nabla\times(\nabla\times\vec{B})=\nabla(\nabla\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}$ を用いた。これは、磁場の拡散方程式 (diffusion Eq. for magnetic field) であり，$\frac{\eta}{\mu_0}$ は拡散係数 (diffusion coefficient) を表す。閉じ込め時間と拡散係数の関係 (relationship between confinement time and diffusion coefficient) と同様に考えると磁場の拡散時間は，系のスケール (system size) を a として

$$\tau_\eta=\frac{a^2\mu_0}{\eta} \tag{119}$$

となる。これは、電流のしみこみ時間 (skin time or penetration time for current) とも呼ぶ。

また、ナビエ・ストークス方程式 (Navier-Stockes Eq.)

$$\frac{D\vec{v}}{Dt}=\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{v} \tag{120}$$

との類似性 (analogy) を考えると，$\frac{\eta}{\mu_0}$ は粘性 (viscosity) を表し、磁気レイノルズ数 (magnetic Reynolds number)R

$$\frac{\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})}{\eta/\mu_0\ \nabla^2\vec{B}}\sim\frac{vB/a}{\eta/\mu_0\ B/a^2}\sim\frac{\mu_0 va}{\eta}\equiv R \tag{121}$$

を定義することが出来る。磁気レイノルズ数は、式 (118) において, 右辺第１項と第２項の比 (ratio of the first to the second terms) を表す。また，磁場の拡散時間 (magnetic diffusion time) とアルフベン速度 (Alfven speed) できまるアルフベン通過時間 (Alfven transit time) の比

$$R=\frac{\mu_0 va}{\eta}=\frac{\mu_0 a^2}{\eta}\frac{v}{a}=\frac{\tau_\eta}{a/v_A} \tag{122}$$

を表している。

ある閉曲面 (closed surface)S を通過する磁束 (magnetic flux)Φ が $\eta\to 0$ で変化しない (constant) ことを示す。磁束の変化は、磁場が時間変化 (time variation) する分と閉曲面の移動 (movement of the closed surface) による分がある。,

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt}&=\int\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot dS+\oint\vec{B}\cdot(\vec{v}\times d\vec{l})=-\int\nabla\times\vec{E}\cdot dS+\oint(\vec{B}\times\vec{v})\cdot d\vec{l} &(123)\\ &=-\int\nabla\times\vec{E}\cdot dS+\oint\nabla\times(\vec{B}\times\vec{v})\cdot dS &(124)\end{aligned}$$

さらにベクトル公式 (vector formulas)、式 (111) を用いて変形すると

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt}&=-\int\nabla\times\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot dS\\ &=-\int\nabla\times\eta\vec{j}\cdot dS=\int\frac{\eta}{\mu_0}\nabla^2\vec{B}\cdot dS &(125)\end{aligned}$$

したがって、$\eta\to 0$ で $\Phi=const.$ となり、磁束（磁力線）はプラズマに凍りついている (fields are frozen-in to the plasma) ことがわかる。これは、流体力学 (fluid dynamics) における渦定理 (Kelvin's circulation theorem) に対応することに注意。

4.4 MHD 発電，MHD 加速 (MHD electric power generation, MHD acceleration)

オームの法則 (Ohm's law)、運動方程式 (Eq. of motion) では、速度と電場 (velocity and electric field)、電流と力 (current and force) が関係付けられている。このことを利用して、発電とその逆の加速が可能である。

- MHD 発電
  高温燃焼ガス (2400°C 以上)(high temperature combustion gas) に電離しやすい物質を入れて導電性 (electric conductivity) を持たせる。運動する燃焼ガス (moving combustion gas) に垂直に磁場 (perpendicular magnetic field) をかける、とオームの法則 (Ohm's law) により誘導電場 (inductive electric field)($\vec{v}\times\vec{B}$) が生じる。この電場を用いて発電させることを MHD 発電 (MHD electric power generation) と呼び、研究開発がされている。流れる電流 $\vec{j}$ による力 $\vec{j}\times\vec{B}$ は $\vec{v}$ と逆向きで，減速する向き (deceleration force or drag force) であることに注意。
- MHD 加速 (MHD acceleration)
  発電とは逆に、電気エネルギーを用いて電磁流体を加速することが可能である。式 (112) から、電磁流体に電流を流すと $\vec{j}\times\vec{B}$ の力が流体にはたらく。同軸プラズマガン (coaxial plasma gun) では、同軸の内と外で放電したときにできる径方向電流 (radial current)$\vec{j}_r$ と周方向磁場 (azimuthal magnetic field)B_θ により、軸方向の力 (axial force) が生まれ、プラズマは軸方向に加速されて飛んでいく。このような仕組みのロケットエンジン (rocket engine) の開発がされている。

5 平衡と安定性 (Equilibrium and stability)

状態の時間発展を考えると非平衡 → 平衡 → 安定 (nonequilibrium → equilibrium → stable) の３段階を考えることができる。プラズマ物理では、力学的に釣り合い (force balance) がとれている状態を平衡状態と呼ぶことが多い。平衡状態でも、微少な摂動 (perturbation) に対して安定 (stable) である場合と不安定 (unstable) である場合が考えられる。ここでは、最初に平衡状態を考え，次に安定性 (stability)、不安定性 (instability) を考える。

MHD 方程式 (112) で、定常状態 (steady state) を考えると

$$\nabla p = \vec{j}\times\vec{B} \tag{126}$$

となる。従って、$\vec{B}\cdot\nabla p = 0$、$\vec{j}\cdot\nabla p = 0$ となり、圧力勾配 (pressure gradient) は磁場、電流に垂直になる (perpendicular to $\vec{B}$, $\vec{j}$)。すなわち、圧力一定の面は磁気面と一致する (Equi-pressure surface=magnetic surface)。マクスウエル方程式 (Maxwell Eq.)$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ より

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left((\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} - \nabla\frac{B^2}{2}\right) \tag{127}$$

整理すると

$$\nabla\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B}{\partial l}\vec{B} - \frac{B^2}{R}\vec{n}\right) \tag{128}$$

となる。この式で右辺が左辺に比べて無視できる時（例えばトロイダルプラズマ (torus plasma) で大半径 ≫ 小半径 (major radius ≫ minor radius)）

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} \sim const. \tag{129}$$

これは、磁場の強いところで圧力が低くなり、磁場の弱いところで圧力が高くなることを示す (pressure decrease at increased magnetic field pressure and vice versa)。これは、プラズマが反磁性 (diamagnetism of plasma) であることに対応する。すなわち、ある場所に圧力の高いプラズマを維持するためにはその周

りの磁場を強くしてやればいいことがわかる (higher outside magnetic pressure to confine high pressure plasma)。

5.1 円柱プラズマの平衡

平衡の例 (example of equilibrium) として半径 a の円柱状プラズマ (cylindrical plasma) で z, θ 方向に対称性があるとき (translation symmetry and axisymmetry)、式 (128) は

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(p+\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right)=-\frac{B_\theta^2}{r\mu_0} \tag{130}$$

となる。この時、軸対称性 (axisymmetry) と $\nabla\cdot\vec{B}=0$ より、$B_r=0$ であることに注意。この式に r^2/a^2 をかけて積分 (integrate) をする。また左辺を部分積分 (integration by parts) すると

$$\int_0^a \frac{\partial}{\partial r}\left(p+\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right)\frac{r^2}{a^2}dr=-\int_0^a \frac{B_\theta^2}{r\mu_0}\frac{r^2}{a^2}dr \tag{131}$$

$$\left[\left(p+\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right)\frac{r^2}{a^2}\right]_0^a-\frac{1}{\pi a^2}\int_0^2\left(p+\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right)2\pi r dr=-\frac{1}{\pi a^2}\int_0^a\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}2\pi r dr \tag{132}$$

$$\left[p+\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}-\left\langle p+\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right\rangle=\left\langle\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right\rangle \tag{133}$$

となる。ここで、$\langle\ \rangle$ は断面積平均 (cross sectional average) を表す。整理すると

$$\left[\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}=\langle p\rangle+\frac{\langle B_z^2\rangle}{2\mu_0} \tag{134}$$

となる。ただし、$p(a)=0$ と仮定した。ここで、プラズマの圧力と磁場の圧力の比、規格化圧力 (normalized pressure) ベータ (beta) を

$$\beta\equiv\frac{\langle p\rangle}{\left[\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}} \tag{135}$$

で表す。式 (134) と β の定義式 (definition) から

$$\beta+\frac{\langle B_z^2/2\mu_0\rangle}{\left[\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}}=1 \tag{136}$$

$$\beta=1-\frac{\langle B_z^2/2\mu_0\rangle}{\left[\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}} \tag{137}$$

$$\tag{138}$$

となる。さらに両辺に $\left[\frac{B_z^2+B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}$ をかけると

$$\langle p\rangle+\frac{\langle B_z^2\rangle-[B_z^2]_{r=a}}{2\mu_0}=\left[\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a} \tag{139}$$

となる。$\langle p\rangle>0$、$\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}>0$ より、B_θ は常に圧力 $\langle p\rangle>0$ を支える役割がある。左辺の第二項の正負 (polarity of the 2nd term of the LHS) を考えると、B_z の大きさを比べて常磁性 (paramagnetism)、反磁性 (diamangetism) と分類することができる。

- 常磁性：$\left\langle B_z^2 \right\rangle > B_z^2|_{r=a}$：$\langle p \rangle > \left[\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}$
- 反磁性：$\left\langle B_z^2 \right\rangle < B_z^2|_{r=a}$：$\langle p \rangle < \left[\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}$

ここで、以下のポロイダルベータ (poloidal beta) を定義する。

$$\beta_p \equiv \frac{\langle p \rangle}{\left[\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}\right]_{r=a}} \tag{140}$$

これを用いると上記の二ケースは

- 常磁性：$\beta_p < 1$
- 反磁性：$\beta_p > 1$

と表すことができる。

反磁性は，各粒子のサイクロトロン運動の結果である。常磁性は，磁力線方向に電流が流れようとする効果からくる。

(June 9, 2017)

常磁性の生じる例 (example of paramagnetism) を示す。オームの法則 (Ohm's law)$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta\vec{j}$ において ExB ドリフト $\vec{v} = (\vec{E} \times \vec{B})/B^2$ でドリフト速度が決まるとすると

$$\begin{aligned} \vec{E} + \frac{1}{B^2}\left((\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B}\right) &= \eta\vec{j} \\ \vec{E} + \frac{1}{B^2}\left((\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B} - B^2\vec{E}\right) &= \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B}}{B^2} = \vec{E}_\parallel = \eta\vec{j} \end{aligned} \tag{141}$$

となる。従って、$\vec{j} \parallel \vec{B}$ となり磁力線に平行に電流 (parallel current) が流れ、常磁性に貢献する (contribute to the paramagnetism)。

6　不安定性 (Instabilities)

6.1　不安定性の分類 (classification of instabilities)

不安定性には様々なものがあるが、異なる観点から分類することができる (classifications from various points of view)。ここでは、MHD 流体 (MHD fluid) としてプラズマを見たときの MHD 不安定性 (MHD instabilities) をとりあげる。MHD 不安定性以外には、速度空間で振る舞いが重要になるものがある。

不安定化の原因となる駆動力 (driving terms) から分類すると

- 圧力勾配 (pressure gradient)
- 電流勾配 (current density gradient)

これらの勾配があるとプラズマは均一になろうとして不安定性を引き起こす (instabilities eliminating gradients)。逆にプラズマを安定化する力 (stabilizing terms) は

- 磁力線の張力 (tensile force of magnetic fields)
- 磁場の圧縮 (compression of magnetic fields)
- 磁場の良い勾配・曲率 (good curvature of magnetic fields)

である。

プラズマの抵抗を無視できると磁力線はプラズマと伴に移動する (frozen into state w/o resistivity)。抵抗がある場合には磁力線のつなぎ変えが起き (magnetic reconnections w resistivity)、磁場配位は変化する。抵抗の影響の有無で分類すると

• 理想モード (ideal MHD mode)

• 抵抗性モード (resistive MHD mode)

また、不安定性の解析方法 (methods for instability studies) として

• フーリエ成分の成長率を求める方法 (finding growth rate of each Fourier component/dispersion relation)

• エネルギー原理 (finding polarity of energy increase against perturbations)

がある。いづれも微小摂動 (small perturbation) を考える。その摂動が成長するか否かを調べるのが前者。摂動によるエネルギー増減の符号を見るのが後者である。

プラズマを MHD 流体としてではなく、粒子として考え、速度空間の構造 (structures in velocity space) を考えなければならない場合もある。

6.2 不安定性の例

ここでは、交換不安定性 (interchange instability)、ソーセージ不安定性 (sausage instability)、キンク不安定性 (kink instability) を紹介する。これらのうち、交換不安定性は圧力勾配 (pressure gradient) によって駆動される。また，ソーセージ不安定性，キンク不安定性は電流（勾配）(current gradient) によって駆動される。いずれの場合も微小変化を仮定して、その変化が成長する場合は不安定で、逆に減衰する場合は安定である。

- 交換不安定性 (interchange instability)
  プラズマと外部（真空）との境界面 (plasma-vacuum boundary) で、境界と垂直に力 (perpendicular force)$\vec{g}$ が加わっているとする。また、磁場は境界と平行であるとする (magnetic fields parallel to the boundary)。この境界面が磁場と垂直に波打っているときの波の振幅の成長を考える (growth of wavy boundary)。イオン (ion) と電子 (electron) の $\vec{g}$ によるドリフトの向きは逆であるため (opposite drift directions)、波うっている斜面に正負の電荷がたまる (charge accumulation at both slopes)。この電荷により電場が生ずる (induced electric field)。電場による $\vec{E} \times \vec{B}$ ドリフトはイオンも電子も同じ向きである。$\vec{g}$ がプラズマの広がる向きであれば (when $\vec{g}$ direction is co to plasma expansion) 波の振幅は $\vec{E} \times \vec{B}$ により成長する (ExB drift enhances the initial wavy boundary)。
  この不安定性は磁場のよい勾配で安定化される。すなわち，磁場の圧力勾配が $\vec{g}$ と逆向きであればよい (stabilized when their directions are opposite)。
- ソーセージ不安定性 (sausage instability)
  円柱状のプラズマ (cylindrical plasma) を考える。表面に電流が流れているとする (surface current)。表面電流の方が磁場エネルギー（インダクタンス）(magnetic energy, inductance) が小さいことに注意。円柱の半径がある部分で小さくなり (if radius decreases at a part)、円柱がくびれると (pinch)、この部分の磁場が大きくなる (B_θ is enhances at this part)。その結果，磁場の圧力が高くなり (increased magnetic pressure enhances the perturbation), プラズマは径方向に圧縮される (radial compression)。

圧縮されるとさらに B_θ 磁場が強くなる。
一方、縦方向の磁場 B_z があると (with a longitudinal magnetic field)、この圧縮により B_z は強められ安定化に寄与する (compressed B_z contributes to the stability)。また、くびれにより縦方向磁場 B_z が曲げられるのでこれも安定化に寄与する (bent B_z also contributes)。
一般に、平行な電流は互いに引き合う (attracting force between parallel currents)。I_1、I_2 の平行電流が r だけ離れているとすると、単位長さあたりの力 (force per unit length)F_r は

$$F_r = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \tag{142}$$

となる。r が小さくなると、この力は大きくなる (increases with the decrease of r)。

- キンク不安定性 (kink instability)
円柱状のプラズマ (cylindrical plasma) を考える。表面に電流が流れているとする (surface current)。電流は磁場 (B_θ) をつくる。円柱が全体として（z 方向に）波うつ (wavy) 場合を考える。円柱が曲がっている部分の内側 (inner side) では B_θ が強くなり、外側 (outer side) では弱くなる。磁場の圧力を考えると、円柱の波うち（変形）は成長する。
縦磁場があると (with a longitudinal magnetic field)、変形により磁力線が曲げられるので (this field line is bent)、これは安定化に寄与する (contributes to stability)。
- マクスウェルの応力テンソル (Maxwell stress tensor)
単位体積のプラズマに働く電磁力 (electromagnetic force) を

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} \equiv \nabla\cdot\sigma - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial S}{\partial t} \quad \left(S \equiv \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})\right) \tag{143}$$

と表記し、σ を定義 (define) する。σ をマクスウェルの応力テンソル (Maxwell stress tensor) と呼ぶ。具体的な表式は

$$\sigma_{ij} = \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{\delta_{ij}}{2}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{\delta_{ij}}{2}B^2\right) \tag{144}$$

となる。対角成分 (diagonal part)$-\frac{B^2}{2\mu_0}$ は磁場の圧力 (pressure) となる。非対角項 (non-diagonal part)B_iB_j は、張力 (tension) を表す。例えば、x 方向の力は

$$F_x = (\nabla\cdot\sigma)_x = \frac{\partial}{\partial x}B_xB_x + \frac{\partial}{\partial x}B_xB_y + \frac{\partial}{\partial z}B_xB_z \tag{145}$$

と表される。z 方向の磁場がわずかに x 方向に曲がっている (vending) 場合を考える。すなわち $B_z \sim const.$、$\frac{\partial B_x}{\partial z} > 0$ である場合を考える。この時、

$$F_x = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}B_xB_z = \frac{1}{\mu_0}B_z\frac{\partial B_x}{\partial z} \tag{146}$$

となる。この内、$\frac{\partial B_x}{\partial z}$ は $(\nabla\times B)_y = \mu_0 j_y$ となり、$F_x = (\vec{j}\times\vec{B})_x$ の項の一部となる。すなわち、マクスウエルの応力の非対角項は磁場の曲がりとそれに伴う張力 (tension) を表しているが、これは、電流 (current) によるローレンツ力 (Lorentz's force) と同等である。

6.3 交換不安定性の成長率の導出 (derivation of growth rate of the interchange instability)

不安定性の解析手法である成長率の評価 (evaluation of the growth rate) を交換不安定性を例に取って説明する。不安定性を波 (wave) として取り扱い、分散関係 (dispersion relation) を求める。

$x<0$ の領域にプラズマ (plasma) があり、$x>0$ の領域に真空 (vacuum) が存在し $\vec{g}$ (>0) の力が x の正の向きにかかっているとする。一様な磁場 (homogeneous magnetic field)B_0 (>0) が z 正向きにかかっていて、z 方向には移動対称性 (translation symmetry) があるとする。平衡状態（$\partial/\partial t=0$）での値を B_0、$\vec{v}_0$、n_0 とする。ただし、$(\vec{v}_0)_x=(\vec{v}_0)_z=0$、$\vec{E}_0=0$ とする。このとき、y 方向に境界が波打つ微小摂動 (wavy perturbation of the boundary) の成長率 (growth rate) を求める。この摂動による 1 次の項 (1st order perturbation) を v_1、E、n_1 とし、これらが、$\propto e^{i(ky-\omega t)}$ 平面波 (plane wave) のフーリエ成分であるとする。任意の (arbitrary)k に対する $\omega(k)$、すなわち分散関係 (dispersion relation) を求める。この時、$Re(\omega)$ は周波数 (frequency) であり、$Im(\omega)$ は成長率・減衰率 (growth rate, decay rate) である。$Im(\omega)>0$ であれば、成長し、不安定 (unstable) と判断できる。

イオンの運動方程式 (Eq. of ion motion)、電子の運動方程式 (Eq. of electron motion)、イオンの連続の式 (Eq. of ion continuity)、電子の連続の式 (Eq. of electron continuity) を連立させて解く (simultaneous Eqs.)。

イオンの運動方程式 (Eq. of ion motion)(105) は平衡状態 (equilibrium) では

$$m_i n_i \frac{D\vec{v}}{Dt} = m_i n_0(\vec{v}_0\cdot\nabla)\vec{v}_0 = 0 = en_0(\vec{v}_0\times\vec{B}_0)+m_i n_0\vec{g} \tag{147}$$

より、イオンは y 方向負向きにドリフト

$$\vec{v}_0 = \frac{m_i}{e}\frac{\vec{g}\times B}{B^2} = \frac{g}{\Omega_i}\vec{e_y}\ , \qquad \left(\text{ただし、}\Omega_i \equiv -\frac{eB_0}{m_i}<0\right) \tag{148}$$

をする。ここで、イオン、電子を表す下付の i、e は適宜省略する。z 方向には力を受けず、慣性運動をする。イオンの運動方程式において微小摂動がある時の 1 次の項（v_1、E、n_1）も含めて考えると

$$m_i(n_0+n_1)\left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}_0+\vec{v}_1)+(\vec{v}_0+\vec{v}_1)\cdot\nabla(\vec{v}_0+\vec{v}_1)\right] = e(n_0+n_1)\left[\vec{E}+(\vec{v}_0+\vec{v}_1)\times\vec{B}_0\right]+m_i(n_0+n_1)\vec{g} \tag{149}$$

となる。この式から 0 次の項を差し引き、1 次の項は残し、2 次以上の項は無視すると (extract only 1st order components)

$$m_i n_0\left[\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t}+\vec{v}_0\cdot\nabla\vec{v}_1\right] = en_0\left[\vec{E}+\vec{v}_1\times\vec{B}_0\right] \tag{150}$$

となる。ここで平面波 (plane wave) を考えているので

$$m_i n_0(-i\omega+ikv_0)\vec{v}_1 = en_0\left[\vec{E}+\vec{v}_1\times\vec{B}_0\right]$$
$$(\omega-kv_0)\vec{v}_1 = \frac{ie}{m_i}(\vec{E}+\vec{v}_1\times\vec{B}_0) \tag{151}$$

となり、各成分 (component) の式は

$$(\omega-kv_0)v_{1x} = \frac{ie}{m_i}(E_x+v_yB_0) \tag{152}$$

$$(\omega-kv_0)v_{1y} = \frac{ie}{m_i}(E_y-v_xB_0) \tag{153}$$

となる。解を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = \frac{1}{(\omega-kv_0)^2-\Omega_i^2}\begin{pmatrix} \omega-kv_0 & -i\Omega_i \\ +i\Omega_i & \omega-kv_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\Omega_i E_x/B_0 \\ -i\Omega_i E_y/B_0 \end{pmatrix} \tag{154}$$

$E_x = 0$, $|\Omega_i| \gg |\omega - kv_0|$ の時にこれを $\vec{v}$ の成分 v_{1x}, v_{1y} について解くと

$$v_{ix} = \frac{E_y}{B_0}$$
$$v_{iy} = i\frac{(\omega - kv_0)}{\Omega_i}\frac{E_y}{B_0} \tag{155}$$

ここで、$v_{1x} \to v_{ix}$、$v_{1y} \to v_{iy}$ と表記した。同様にして、電子の運動方程式 (Eq. of electron motion) を考える。$e \to -e$、$m_i \to m_e$、$\Omega_i \to -\Omega_e$ と変換して

$$v_{ex} = \frac{E_y}{B_0}$$
$$v_{ex} = -i\frac{(\omega - kv_0)}{\Omega_e}\frac{E_y}{B_0} \to 0 \tag{156}$$

となる。ただし、2 行目では、$\Omega_e \gg |\Omega_i| \gg |\omega - kv_0|$ を用いた。

イオンの連続の式 (Eq. of ion continuity) の 0 次の平衡成分は

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \vec{v}_0) = 0 \tag{157}$$

ここで、$\nabla n_0 \parallel \vec{e}_x$、$\vec{v}_0 \parallel \vec{e}_y$ であり、$\nabla n_0 \cdot \vec{v}_0 = 0$ である。また、$\nabla \cdot \vec{v}_0 = 0$ に注意。イオンの連続の式 (Eq. of ion continuity) の 0 次＋ 1 次の式は

$$\frac{\partial (n_0 + n_1)}{\partial t} + (n_0 + n_1)\nabla \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) + (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \cdot \nabla (n_0 + n_1) = 0 \tag{158}$$

となる。この式から 0 次の成分を差し引き、2 次の成分を無視すると、1 次の式

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0(\nabla \cdot \vec{v}_1) + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) n_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) n_0 = 0 \tag{159}$$

が得られる。平面波 (plane wave)$\propto e^{iky - i\omega t}$ を考えているので

$$-i\omega n_1 + ikn_0 v_{iy} + ikv_0 n_1 + v_{ix} n_0' = 0 \tag{160}$$

となる。ただし、$n_0' \equiv \frac{\partial n_0}{\partial x}$ と表記した。この式に Eq.(155) を代入すると

$$(\omega - kv_0) n_1 + i\frac{E_y}{B_0} n_0' - ikn_0 \frac{\omega - kv_0}{\Omega_i}\frac{E_y}{B_0} = 0 \tag{161}$$

電子の運動方程式 (Eq. of electron motion) も同様に解けるが, $\Omega_e \gg |\Omega_i|$ であるので $v_{e0} \ll v_{i0}$, $v_{ey} \ll v_{ex}$, すなわち，$v_{e0} \sim 0$, $v_{ey} \sim 0$ とすると，イオンの式 (161) に対応する電子の式 (Eq. for electrons) は

$$\frac{E_y}{B_0} = i\frac{\omega n_1}{n_0'} \tag{162}$$

となる。これを式 (161) に代入し、

$$(\omega - kv_0) n_1 + \left(-n_0' + kn_0 \frac{\omega - kv_0}{\Omega_i}\right)\frac{\omega n_1}{n_0'} = 0$$
$$(\omega - kv_0) + \left(-1 + \frac{kn_0}{\Omega_i}\frac{\omega - kv_0}{n_0'}\right)\omega = 0$$
$$-\frac{v_0 \Omega_i n_0'}{n_0} + \omega(\omega - kv_0) = 0 \tag{163}$$

さらに式 (148) を用いると

$$\omega^2 - kv_0\omega - g\frac{n_0'}{n_0} = 0$$

$$\omega^2 - \frac{kg\omega}{\Omega_i} - g\frac{n_0'}{n_0} = 0 \tag{164}$$

得られた分散式を解くと

$$\omega = \frac{kg}{2\Omega_i} \pm \sqrt{\frac{k^2g^2}{4\Omega_i^2} + \frac{gn_0'}{n_0}} \tag{165}$$

であり、

$$-\frac{gn_0}{n_0'} > \frac{k^2g^2}{4\Omega_i^2} \tag{166}$$

であれば、複素数の解が存在し、不安定になる。この時、$\vec{g}$ と ∇n_0 は逆向きでなければならない。また成長率は、$\left|\frac{gn_0}{n_0'}\right| \gg \frac{k^2g^2}{4\Omega_i^2}$ の時は

$$\mathrm{Im}(\omega) \sim \sqrt{\left|\frac{gn_0'}{n_0}\right|}$$

となる。反対に $\vec{g}$ と ∇n_0 が同じ向きであれば、式 (166) は成立せず、式 (165) の根号 (square root) 内は正、ω は実数になり、$e^{-i\omega t}$ で振動する解する解がえられる。この不安定性は、密度勾配 n_0' で駆動源となっていることが分かる。また、線形解析の場合、振幅自体は任意 (arbitrary amplitude) であり決まらないことに注意。

7 プラズマ中の波 (waves in plasma)

7.1 波動の分類 (classification of waves) と取り扱い方 (approach)

プラズマでは、遠距離相互作用 (action at a distance) である電場、磁場 (electric and magnetic forces) があること、抵抗 (resistivity)、粘性 (viscosity) などの散逸が小さい (small dissipation) ことからコーヒーレントな摂動 (coherent perturbation) である波動 (wave) が存在しやすい。

プラズマは下記の要因で様々な波動 (various waves) がある。

- イオン電子 (ion and electron) の少なくとも２種類の構成粒子がある。
- 密度 (density) に対する依存性（プラズマ振動数 Π), 磁場 (magnetic field) に対する依存性（サイクロトロン周波数 Ω), 熱運動 (thermal motion) に対する依存性（kT）がある。
- 磁場 (magnetic field) の向き、波動の伝搬 (propagation) 方向、電場 (electric field) の向き、変位 (dislacement) の向きの関係がある。

これらの様々な側面 (various aspects) に対応していろいろな分類方法 (classification) がある。

1. 静電波、電磁波 (electrostatic and electromagnetic waves)
   静電波では $\vec{E} = -\nabla\phi = -i\vec{k}\phi \quad \to \vec{E} \parallel \vec{k},\ \vec{B}_1 = 0$　電磁波では $\vec{B}_1 \neq 0$
2. 熱いプラズマ、冷たいプラズマ (hot and cold plasmas)
   kT が分散式 (dispersion relation) に入るか否か
3. R 波 L 波 (R- and L- waves)
   右回り円偏光か左回り円偏光 (right- and left- circular polarization) か

4. 正常波 (O 波)，異常波（X 波）(ordinary and extraordinary modes)
   偏光面が磁場に平行 (parallel) か垂直 (perpendicular) か
5. 速波（Fast Wave），遅波（Slow Wave）
   位相速度 (phase velocity) が速いか遅いか

ここでは、冷たいプラズマ (cold plasma)、一様磁場、一様電場 (homogeneous magnetic and electric fields) での波 (wave) を考える。背景プラズマ (background plasma) の磁場を $\vec{B}$ とし、電子密度とイオンの密度はほぼ等しく $n_e \sim n_i$、準中性（quasi-neutrality）であるとする。また０次の電場はないとする (0th order E is zero)。平面波 (plane wave) を考える。

波の特徴 (feature) は波数ベクトル (wave number vector)$\vec{k}$、角周波数 (angular frequency)ω で表される。一様な場であれば、平面波が単純 (plane wave is simple) で、全ての１次の変数 (all 1st order variables) は $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ で表される。また、線形な現象 (linear phenomena) であれば、フーリエ成分の重ね合わせ (linear combination of Fourier components) で、全ての変数を表すことができ、平面波 (plane wave) の振る舞い (behavior) が分かれば、全てがわかる。

$\vec{k}$ と ω の関係、関係を表す式を分散関係 (dispersion relation)、分散式 (dispersion formula) と呼ぶ。これが分かれば、任意の時空間分布 (spatio-temporal distribution) をフーリエ成分 (Fourier components)、すなわち、平面波 (plane wave) に分解し、その時間変化 (time evolution) を ω から予測 (predict) することができ、結果的に系の振る舞いを予測することができる。

波を摂動 (perturbation) と考え、現象を線形 (linear phenomena) で近似 (approximate) する。すなわち、背景プラズマ (background plasma) を０次 (0th order state)、波 (wave) を１次 (1st order state) と考え、２次以上 (2nd and higer order) を無視 (neglect) する。具体的な１次の変数 (1st order variable) は $\delta\vec{B}$、$\delta\vec{E}$、δn、$\delta\vec{v}$ 等がある。k や ω が虚数成分 (imaginary component) k_I、ω_I を持てば変数は $\propto e^{-k_I x},\ e^{\omega_I t}$ となる成分を持ち、空間的、時間的 (spatio-temporal) に減衰 (decay)、発散 (diverge) する。時間的な減衰、発散が安定 (stable)、不安定 (unstable) に対応することに注意。

7.2 電磁場中の粒子の運動 (particle motion in electromagnetic field)

ここでは、１次の電場 $\vec{E}$ に対する応答 (response) を求める。荷電粒子 (charged particle) の運動方程式 (Eq. of motion) は

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{167}$$

と表せる。ここで $\vec{B}_0$ ($\parallel \vec{e}_z$) を０次の量 (0th order) とし、$\vec{E}$、$\vec{v}$ を１次の量 (1st order) とする。また $\vec{v}\times\vec{B}_1$ は２次の量 (2nd order) なので、無視する (neglect)。また、平面波 (plane wave) の解を $E_x, E_y, E_z, v_x, v_y, v_z \propto e^{-i\omega t}$ とする。運動方程式 (Eq. of motion) は

$$-i\omega m\vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}_0)$$

成分で表すと

$$
\begin{aligned}
-i\omega v_x &= \frac{qB_0}{m}\left(\frac{E_x}{B_0}+v_y\right)\\
-i\omega v_y &= \frac{qB_0}{m}\left(\frac{E_y}{B_0}-v_x\right)\\
-i\omega v_z &= \frac{qB_0}{m}\frac{E_z}{B_0}
\end{aligned}
\tag{168}
$$

となる。$\vec{B}=B_0\vec{e}_z$ であることに注意。$\Omega\equiv -qB/m$ を用い、さらに両辺に i をかけると

$$
\begin{pmatrix} \omega & +i\Omega & 0 \\ -i\Omega & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -i\frac{\Omega E_x}{B_0} \\ -i\frac{\Omega E_y}{B_0} \\ -i\frac{\Omega E_z}{B_0} \end{pmatrix}
\tag{169}
$$

逆行列 (inverse matrix) をかけて解 (solution) を求めると

$$
\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}
= \frac{-i\Omega}{\omega^2-\Omega^2}
\begin{pmatrix} \omega & -i\Omega & 0 \\ +i\Omega & \omega & 0 \\ 0 & 0 & (\omega^2-\Omega^2)/\omega \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \frac{E_x}{B_0} \\ \frac{E_y}{B_0} \\ \frac{E_z}{B_0} \end{pmatrix}
\tag{170}
$$

となる。この解は、$\vec{E}$ を与えられた時の粒子 (particle) の応答 (response) を表す。$\vec{v}$ は $\vec{E}$ に比例する (proportional) ことに注意。

7.3 誘電率と誘電テンソル (permittivity and dielectric tensor)

プラズマ中の波動 (waves in plasma) を考える時に、プラズマをある誘電率 (permittivity) をもつ物質と考える。すなわち、波動に対するプラズマを構成する粒子の応答 (response of charged particles) を誘電率に反映させる。この時、マクロな電流はない (no macroscopic j) と考え、媒質中のマクスウエル方程式 (Maxwell's Eqs. in matter)

$$
\nabla\times\vec{H}=\left(\vec{j}\right)+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}
\tag{171}
$$

を用いる。ここで

$$
\vec{D}=\epsilon\vec{E}=\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}\quad\left(\equiv\overleftrightarrow{K}\cdot\vec{E}\right)
\tag{172}
$$

ϵ は誘電率 (permittivity)、$\vec{P}$ は分極電場 (electric polarization)、$\overleftrightarrow{K}$ は誘電率テンソル (dielectric tensor) と呼ばれる。分極 (polarization) は電場の影響で荷電粒子の位置が変位して生じるが (displacement of charged particles by E)、その過程では、電流が流れる (current is generated to establish the polarization)。すなわち

$$
\vec{P}=\int\vec{j}dt
\tag{173}
$$

ただし、この $\vec{j}$ はマクロな量ではなく、波動電場に誘起される荷電粒子の変位電流・分極電流 (wave field induced displacement current, polarization current) である。ここでは、線形な波動 (linear wave) を考えているので、分極や粒子の運動はフーリエ成分 (Fourier component) $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ で表されると考えてよい。従って、

$$
\vec{j}=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=-i\omega\vec{P},\quad \vec{P}=\int\vec{j}dt=\frac{i}{\omega}\vec{j}
\tag{174}
$$

一方、電流密度 $\vec{j}$ は各荷電粒子の運動を反映して (reflect the motion of each particle)

$$\vec{j} = \sum_j n_j q_j \vec{v}_j \tag{175}$$

j は粒子の種類を表す。式 (172) に式 (174)、(175) を代入すると

$$\begin{aligned}\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} &= \epsilon_0 \left(\vec{E} + \sum_j \frac{i n_j q_j \vec{v}_j}{\epsilon_0 \omega} \right) \\ &= \epsilon_0 \left(\vec{E} + \overleftrightarrow{\chi} \cdot \vec{E} \right) \\ &= \epsilon_0 \overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E}\end{aligned} \tag{176}$$

が生じる。ここで、前節で示したように $\vec{v}$ ($\vec{j}$) は $\vec{E}$ と線形な関係にある (linear relationship) ことを用いてテンソル $\overleftrightarrow{\chi} \equiv \frac{i n_j q_j \vec{v}_j}{\epsilon_0 \omega}$ を用いた。テンソル $\overleftrightarrow{\chi}$ を感受率 (susceptability) と呼び、これは多種類の粒子がある時に $\overleftrightarrow{\chi} = \sum_j \overleftrightarrow{\chi}_j$ と表現でき便利である。$\overleftrightarrow{\chi}$ と誘電率テンソル (dielectric tensor)$\overleftrightarrow{K}$ は $\overleftrightarrow{K} = \overleftarrow{I} + \overleftrightarrow{\chi}$ の関係がある。$\overleftrightarrow{\chi}$、$\overleftrightarrow{K}$ は無次元量 (dimensionless quantity) であることに注意。もし、これらがテンソル (tensor) ではなくスカラー (scalar) である場合は、$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ となり、比誘電率 (relative permittivity) が誘電テンソル (dielectric tensor) に対応する。

ここでは、粒子の種類は一種類とする (consider only one sort of particle)。後で、電子とイオンの二種類がある場合を考える。

$$\overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E} = \vec{E} + \frac{inq}{\epsilon_0 \omega} \vec{v} = \vec{E} - i \left(-\frac{nq}{\epsilon_0 B_0} \right) \frac{B_0}{\omega} \vec{v} \tag{177}$$

ここで、プラズマ振動数 (plasma frequency) $\Pi \equiv \sqrt{\frac{nq^2}{\epsilon_0 m}}$、サイクロトロン周波数 (cyclotron frequency) $\Omega \equiv -\frac{qB_0}{m}$ を用いると

$$\frac{\Pi^2}{\Omega} = -\frac{nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{m}{qB_0} = -\frac{nq}{\epsilon_0 B_0}$$

となり、これを式 (177) に代入すると

$$\overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E} = \vec{E} - i \frac{\Pi^2}{\Omega} \frac{B}{\omega} \vec{v} \tag{178}$$

となる。これに式 (170) を代入すると

$$\overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E} = \vec{E} - i \frac{\Pi^2}{\Omega} \frac{B}{\omega} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Pi^2}{\omega^2 - \Omega^2} & +i \frac{\Pi^2}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{\Omega}{\omega} & 0 \\ -i \frac{\Pi^2}{\omega^2 - \Omega^2} \frac{\Omega}{\omega} & 1 - \frac{\Pi^2}{\omega^2 - \Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\Pi^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \vec{E} \tag{179}$$

この行列部分 (matrix) が誘電率テンソル (dielectric tensor) $\overleftrightarrow{K}$ を表す。これを

$$\begin{pmatrix} K_\perp & -iK_X & 0 \\ +iK_X & K_\perp & 0 \\ 0 & 0 & K_\parallel \end{pmatrix} \tag{180}$$

と表す。

7.4 屈折率と分散式 (refractive index and dispersion formula)

マクスウエル方程式 (Maxwell's Eqs.) から波動方程式 (wave Eq.) を導き屈折率 (refractive index) を決める分散式 (dispersion formula) を求める。プラズマの圧力は低く、非磁性 (unmagnetized) であるとすると、マクスウエル方程式 (Maxwell's Eqs.)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{H} = \nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{181}$$

となる。ここで波動（$\vec{E}$, $\vec{B}_1$, $\vec{D}$）は 1 次の線形項 (1st order linear terms) であり、フーリエ成分 (Fourier component) $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ で表されるとすると上式で $\nabla\times \to ik$、$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$ としてマクスウエル方程式を書き替えると

$$\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B}_1$$
$$\vec{k} \times \vec{B}_1 = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mu_0(-i\omega)\vec{D} = -\mu_0 \omega \epsilon_0 \overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E} \tag{182}$$

となる。この 2 つの式より

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E} = 0 \quad \left(\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}\right) \tag{183}$$
$$\vec{N} \times (\vec{N} \times \vec{E}) + \overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E} = 0 \tag{184}$$

が得られる。ただし、$\vec{N} \equiv \frac{\vec{k}c}{\omega}$ は屈折率 (refractive index) を表す。これが $\vec{E} \neq 0$ の解 (nontrivial solution) を持つ条件から、波の満たすべき $\omega, \vec{k}$ の関係式が得られ、これを波の分散式 (dispersion formula, dispersion relation) と言う。従って、波の特性を理解するには，誘電率テンソル (dielectric tensor)$\overleftrightarrow{K}$ を求め，分散式を求める必要がある。

式 (183) は波動方程式 (wave equation)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E} \tag{185}$$

の近似である。電荷がない時は $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ であり、波動方程式

$$\nabla^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E} = 0 \tag{186}$$

となることに注意。

式 (184) をさらに変形すると

$$(\vec{N} \cdot \vec{E})\vec{N} - N^2\vec{E} + \overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E} = 0 \tag{187}$$

となる。背景磁場 (background magnetic field)B_0 は先に決めたように z 方向とするが、xy 方向は定義されていなかったので以下のように定義する (define xy directions as follows)。すなわち伝搬方向 (propagation direction)、$\vec{k}$ の方向が xz 平面内になるように x 方向を決め、y 方向は x 方向、z 方向に垂直な方向として決まる。$\vec{N} \equiv \frac{\vec{k}c}{\omega}$ は $\vec{k}$ に平行であり、この時、$\vec{N} = (N_\perp, 0, N_\parallel)$, $(N_y = k_y = 0)$ となる。伝搬方向 (propagation direction) が z 軸 (z-axis) となす角を θ とすると、

$$N_\parallel = N\cos\theta, \quad N_\perp = N\sin\theta \tag{188}$$

と表現でき、後で用いる。$N_\perp$, $N_\parallel$ を用いて

$$\vec{N}\cdot\vec{E} = N_\perp E_x + N_\parallel E_z \tag{189}$$

と書き替え、これを式 (187) に第一項 (the 1st term)、第二項 (the 2nd term) に代入すると

$$(\vec{N}\cdot\vec{E})\vec{N} - N^2\vec{E} = \begin{pmatrix} N_\perp^2 E_x + N_\perp N_\parallel E_z \\ 0 \\ N_\perp N_\parallel E_x + N_\parallel^2 E_z \end{pmatrix} - (N_\perp^2 + N_\parallel^2)\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N_\parallel^2 & 0 & N_\perp N_\parallel \\ 0 & -N^2 & 0 \\ N_\perp N_\parallel & 0 & -N_\perp^2 \end{pmatrix}\vec{E} \tag{190}$$

となる。第三項 (the 3rd term) と合わせると

$$\begin{pmatrix} K_\perp - N_\parallel^2 & -iK_X & N_\perp N_\parallel \\ +iK_X & K_\perp - N^2 & 0 \\ N_\perp N_\parallel & 0 & K_\parallel - N_\perp^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \tag{191}$$

となる。ここで、$N^2 = N_\perp^2 + N_\parallel^2$ であることに注意。この行列が非自明 (nontrivial) な解、すなわち $E_x = E_y = E_z = 0$ 以外の解を持つためには、この行列 (matrix) の行列式 (determinant) がゼロ (zero)、

$$(K_\perp N_\perp^2 + K_\parallel N_\parallel^2)N^2 - \left\{(K_\perp^2 - K_X^2)N_\perp^2 + K_\parallel K_\perp(N^2 + N_\parallel^2)\right\} + K_\parallel(K_\perp^2 - K_X^2) = 0 \tag{192}$$

でなければならない。ここで $K_\perp$, $K_\parallel$, K_X は式 (179) の行列の要素 (matrix element) で表されるような定数 (constants)。これは、密度 (density) と磁場 (magnetic field) で決まる。未知数は $\vec{N} = (N_\perp, 0, N_\parallel)$ の 2 成分である。この式は N の 4 次方程式 (quartic Eq.) であり、これを解くことで、$N_\perp = k_x c/\omega$、$N_\parallel = k_z c/\omega$ が得られる分散式 (dispersion formula) である。

7.5 分散式の解と様々な波 (solution of the dispersion formula and various waves)

波の伝搬する方向 (propagation direction of wave) の z 軸 (axis) からの角度 (angle) を θ を用いて、屈折率 (refractive index) を $N_\parallel = N\cos\theta$, $\quad N_\perp = N\sin\theta$ と書き替えて、分散式 (192) に代入すると

$$(K_\perp \sin^2\theta + K_\parallel \cos^2\theta)N^4 - \left\{(K_\perp^2 - K_X^2)\sin^2\theta + K_\parallel K_\perp(1+\cos^2\theta)\right\}N^2 + K_\parallel(K_\perp^2 - K_X^2) = 0 \tag{193}$$

となる。これは、N^2 の 2 次方程式 (quadratic Eq.) であり、θ が与えられた場合には、解の公式 (quadratic formula) を用いて解くことができる。後のために (for later usage)、この式の最後の項 (the last term) $K_\parallel(K_\perp^2 - K_X^2)$ を $R \equiv K_\perp + K_\parallel$, $L \equiv K_\perp - K_\parallel$ を用いて $K_\parallel RL = K_\parallel(K_\perp^2 - K_X^2)$ と表しておく。

- 正常波と異常波 (ordinary wave and extraordinary wave)
  $\theta = \frac{\pi}{2}$ の場合、すなわち、磁力線に垂直に伝搬する波 (wave propagating perpendicular to magnetic fields) を考える。座標系の定義から波は x 方向に伝搬 (propagate along x-axis) することに注意。分散式 (dispersion formula) 式 (193) に $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入して解くと

$$\begin{aligned} K_\perp N^4 - \left\{(K_\perp^2 - K_X^2) + K_\parallel K_\perp\right\}N^2 + K_\parallel(K_\perp^2 - K_X^2) &= 0 \\ \left(K_\perp N^2 - (K_\perp^2 - K_X^2)\right)\left(N^2 - K_\parallel\right) &= 0 \\ N^2 = N_\perp^2 = \frac{K_\perp^2 - K_X^2}{K_\perp} = \frac{RL}{K_\perp}, \quad N^2 = K_\parallel \end{aligned} \tag{194}$$

  二つの解 (two solutions) が得られる。

$N=N_\perp=K_\parallel$ であるとき、式 (191) にこれを代入すると

$$\begin{pmatrix} K_\perp & -iK_X & 0 \\ +iK_X & K_\perp-K_\parallel & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}=0 \tag{195}$$

が得られる。これは $\vec{E}$ の満たすべき式であり、$E_x=E_y=0,\ E_z\neq 0$ という解 (solution) をもつ。これは、波の偏波 (polarization) の様子を表しており、背景磁場の方向に電場成分 (electric field parallel to the magnetic field) があることを示している。具体的には、 $k_x=N_\perp\omega/c=\sqrt{K_\parallel}\omega/c=$ を用いて、$E_z\propto e^{ik_xx-\omega t}$ を満たせば、これは解であり、係数（複素数）は任意 (aribitrary complex coefficient) である。この波を正常波 (ordinary wave) と呼ぶ。$K_\parallel$ の具体的な表式を用いた波の性質については後述する。

もう一方の解 (the other solution) は、$N^2=N_\perp^2=\frac{K_\perp^2-K_X^2}{K_\perp}$ であり、上と同様に式 (191) にこれを代入すると

$$\begin{pmatrix} K_\perp & -iK_X & 0 \\ +iK_X & K_X^2/K_\perp & 0 \\ 0 & 0 & K_\parallel-\frac{K_\perp^2-K_X^2}{K_\perp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}=0 \tag{196}$$

が得られる。これは、$E_z=0,\ E_x/E_y=iK_x/K_\perp$ という解 (solution) をもつ。波の偏波は xy 平面内 (polarization is in xy-plane) であり、位相 (phase) が i、すなわち 90 度 (90 degrees) ずれていることから（楕）円偏波 (circular polarization) しているのが分かる。波の進行方向は x 方向 (propagating along x) であることに注意。

- R 波と L 波 (R-wave and L-wave)

  $\theta=0$ の場合、磁力線に平行方向、すなわち z 方向に伝搬する (propagating along z (i.e., magnetic field)) ことに注意。$N_\perp=0$ であるので、式 (191) は、

$$\begin{pmatrix} K_\perp-N_\parallel^2 & -iK_X & 0 \\ +iK_X & K_\perp-N_\parallel^2 & 0 \\ 0 & 0 & K_\parallel \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}=0 \tag{197}$$

となる。分散式 (dispersion formula) 式 (193) に $\theta=0$ を代入して解くと

$$\begin{aligned} K_\parallel N^4-2K_\parallel K_\perp N^2+K_\parallel RL&=0 \\ K_\parallel\left(N^2-R\right)\left(N^2-L\right)&=0 \end{aligned} \tag{198}$$

となり、解 (solution) は、$K_\parallel=0,\ N^2=R,\ N^2=L$ となる。

最初に (Firstly)、$K_\parallel=0$ の解を考える。これを式 (197) に代入すると

$$\begin{pmatrix} K_\perp-N_\parallel^2 & -iK_X & 0 \\ +iK_X & K_\perp-N_\parallel^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{199}$$

となり、$E_x=E_y=0,\ E_z\neq 0$ が解となる。また、先の正常波、異常波と異なり (different from the oridinary and extraordinary waves)$N_\parallel=k_zc/\omega$ は任意 (arbitrary k_z) である。すなわち、(ω が) $K_\parallel=0$ を満たせば、任意の波長 (arbitrary wavelength) が存在しうる。これは Sec. 1.8 で説明したプラズマ振動 (represents plasma oscillation) を表す。例えば (For example)、$k=0$ で波長が無限大であれば、どの空間点も同じ位相で振動する。

次に、$N^2=N_\parallel^2=R$, $N^2=N_\parallel^2=L$ の解を考える。式 (197) から、$E_z=0$ となる。また、この式の２行目 (2nd line in the Eq.) から

$$\begin{aligned} iK_X E_x + (K_\perp - N_\parallel^2)E_y &= 0 \\ \frac{iE_x}{E_y} &= \frac{N_\parallel^2 - K_\perp}{K_X} \end{aligned} \tag{200}$$

となり、$N^2=R$, $N^2=L$ に対応して二つの波 (corresponding two waves are)

$$\begin{aligned} R\text{ 波：}\quad & \frac{iE_x}{E_y} = \frac{R-K_\perp}{K_X} = \frac{K_X}{K_X} = 1 \\ L\text{ 波：}\quad & \frac{iE_x}{E_y} = \frac{L-K_\perp}{K_X} = -\frac{K_X}{K_X} = -1 \end{aligned} \tag{201}$$

となる。これらの波は伝搬方向 (propagation direction)(z 方向) に対し垂直な電場 (perpendicular electric field) を持ち、その偏波方向 (polarization) は xy で 90 度ずれ (90 degree difference) ており、xy 平面内で偏波方向が時間的に回転する (polarization direction rotates in xy-plane)。例えば (For example)、R 波の場合 $E_x=e^{i(kz-\omega t)}$ とすると、$E_y=ie^{i(kz-\omega t)}=e^{i(kz-\omega t+\pi/2)}$ となる。これは、$E_x(z=0)=\cos\omega t$ であれば $E_y(z=0)=\cos(\omega t-\pi/2)=\sin\omega t$ である。したがって、R 波、L 波は円偏波を表す (R- and L-waves represent circularly polarized waves)。

- 電子とイオンがある場合 (cases with ions and electrons)
  粒子種が複数ある場合は (In the case of several sorts of particles)、式 (176) で示したように、$\sum$ で和 (summation) を取れば良い。ここでは、電子と１種のイオンがある場合を考える (consider electrons and a sort of ions)。
  - $\underline{K_\parallel}$

$$K_\parallel = 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \quad \left(\Pi_{e,i}^2 \equiv \frac{n_{e,i}Z^2e^2}{m_{e,i}\epsilon_0}\right) \tag{202}$$

  において、$m_e \ll m_i$, $\Pi_e \gg \Pi_i$ が成立するので

$$K_\parallel \approx -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \tag{203}$$

  として良い。
  - $\underline{K_\perp}$

$$K_\perp = 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2-\Omega_e^2} - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2-\Omega_i^2} \quad \left(\Omega \equiv \frac{qB}{m}, \quad |\Omega_e| \gg \Omega_i\right) \tag{204}$$

  $\omega \gg |\Omega_e|$ の時、$K_\perp \approx 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \approx 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}$
  $\omega \sim |\Omega_e|$ の時は第二項 (2nd term)、$\omega \sim \Omega_i$ の時は第３項 (3rd term) が発散する可能性 (can be infinity) があり無視でない。このように電子、イオンから構成されるプラズマでは、ω と密度 (density) を反映する Π_e、Π_i、磁場 (magnetic field strength) を反映する $|\Omega_e|$、Ω_i との大小関係 (magnitude relation) により様々なケース（波）(variety of waves) がある。

- 正常波とカットオフ (ordinary wave and cutoff)
  $\omega \sim \Pi_e \gg \Pi_i$ で、磁力線と垂直方向 (perpendicular to the magnetic field)($\theta = \pi/2$) に伝搬する正常波 (ordinary wave) を考える。分散式の解は (solution of dispersion formula)

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = N^2 = K_{\parallel} = 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \tag{205}$$

  となる。ここで、$\Pi_e \propto \sqrt{n_e}$ であるので、真空では (in vacuum)、$n_e = 0$、$N = 1$ であり、これは通常の電磁波 (normal electromagnetic wave) である。プラズマの外から入射した波は (wave injected toward a plasma)、プラズマ中に侵入し密度が上がるにしたがって、屈折率の二乗 N^2 が下がり (N^2 decreases along the propagation due to the increasing density) $\omega = \Pi_e$ の時に $N^2 = 0$ となる。この時の状況を考える (Consider such situation with $N^2 = 0$)。プラズマ中の波数 (wavenumber)k は真空での波数 (wavenumber in vacuum)k_0 と屈折率 (refractive index) を用いて

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{\lambda_0}{\lambda} = Nk_0 \tag{206}$$

  と表される。従って
  $N^2 > 0$ の時、N は実数 (real)、k は実数で、波は $e^{\pm ikx}$ となる。
  $N^2 < 0$ の時、N は純虚数 (imaginary)、k は純虚数で、波は $e^{\pm Im(k)x}$ となる。
  後者 (The latter) は空間的に減衰する (decays along propagation) エバネセント (evanescent) な波を表す。
  十分密度の高いプラズマに外部から正常波を入射する場合を考えると (consider a wave launched toward a plasma with sufficiently high density)、N^2 は徐々に下がり (decreases)、負になる領域で波は伝搬せずに減衰する (the wave decays at the negative N^2 region)。波はここで反射される (the wave is reflected)。これは、鏡 (mirror)（金属 (metal)）での光の反射 (light reflection) と同じ現象であり、量子力学における粒子の反射 (particle reflection in quantum mechanics) と同じである。このように波が侵入できず反射する現象をカットオフ (cutoff) と呼ぶ。以下、量子力学における WKB 法と分散式の類似性 (analogy between WKB method and dispersion relation) を示し、量子力学の知識を用いて反射 (reflection) やトンネル効果 (tunnel effect) を考える。
- WKB 近似による理解 (WKB approx.)
  分散式は，狭い意味での WKB 近似であり、波の波長の変化の空間スケールが波長よりも十分長い (assuming that the scale length is much longer than the wavelength) という仮定をしている。量子力学における WKB 近似と同じ手法を使ってこれを示す。
  位相速度 (phase velocity)v をもつ１次元の波の波動方程式 (1-dimensional wave Eq.) は

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \tag{207}$$

  ここである周波数 ω のみを考え，$E = E(x)e^{-i\omega t}$ として変数分離 (separation of variables) を行うと波動方程式は

$$E'' + \frac{\omega^2}{v^2}E = E'' + k_0^2 N^2 E = 0 \tag{208}$$

  ここで，$N = \frac{c}{v} = \frac{kc}{\omega}$ は屈折率 (refractive index) を表す。

一方，量子力学では，Sch\'oredinger 方程式 (Eq.)

$$\frac{\hbar}{2m}\Phi'' + (E-V)\Phi = 0$$

において

$$\Phi = e^{iS/\hbar}\ , \quad S = S_0 + \frac{\hbar}{i}S_1 + \dots$$

と近似した。これに対応して $E(x) = e^{i\phi(x)}$ とおくと波動方程式 (wave Eq.) は

$$\phi'^2 - i\phi'' - N^2k_0^2 = 0 \tag{209}$$

となる。ここで，$\phi = \phi_0 + \phi_1$ とおくと０次，１次の式 (0th and 1s order Eqs.) は

$$\begin{aligned} \phi_0'^2 = N^2k_0^2\ , &\quad \to \phi_0' = k = \pm Nk_0 \\ 2\phi_0'\phi_1' = i\phi_0''\ , &\quad \to \phi_1' = \frac{i\phi_0''}{\phi_0'} \end{aligned} \tag{210}$$

ここで，もし (under the condition)

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1\text{ 次の項}}{2\text{ 次の項}}\right| = \left|\frac{\phi_0''}{\phi_0'^2}\right| \ll 1 \\ &\to \frac{d}{dx}\left|\frac{1}{\phi_0'}\right| = \frac{d}{dx}\left|\frac{1}{k}\right| \ll 1 \end{aligned} \tag{211}$$

であれば，この近似（展開）は正しい (the approximation is valid)。これは，波長の変化が波長に比べて十分緩やかであることを意味する。この時,

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \pm\int Nk_0 dx \\ \phi_1 &= \frac{i}{2}\log|\phi_0'| = \frac{i}{2}\log|Nk_0| \end{aligned} \tag{212}$$

となり，波の振幅は (amplitude)

$$E = e^{i\phi} = \frac{1}{\sqrt{Nk_0}}e^{\pm i\int Nk_0dx} \tag{213}$$

従って，分散式は WKB 近似をしたときの位相項を表現したものである (the dispersion relation express the phase term in WKB approx)。WKB 近似が成立しないときには，式 (208) を解かなければならない。

量子力学におけるトンネル効果 (tunnel effect in quantum mechanics) は、ポテンシャル障壁 (potential barrier) を $V-E$ としたときに

$$\frac{|\Psi_{out}^2|}{|\Psi_{in}^2|} = e^{-2\int\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)}dx} \tag{214}$$

となる。これに対応する波動の式は (wave Eq.)

$$\frac{|E_{out}^2|}{|E_{in}^2|} = e^{-2\int|k|dx} \tag{215}$$

となり、この時 k は純虚数 (imaginary) である。$V-E=0$ となる条件は $N^2=0$ となる条件に対応し、この近傍で V が線形に変化する (linear spatial variation) と仮定すると、波動関数の解 (solution) はエアリー関数 (Airy function) で表される。

- 正常波の応用 (application of ordinary wave)
  電離層 (ionosphere) は弱電離プラズマ (weakly ionized plasma) であり、丁度短波放送 (short wavelength broadcasting) の波が反射 (reflected) される。短波放送では電離層と地上の間で波が反射を繰り返すことにより (multiple reflection between the ionosphere and the earth)、見通しの確保できないような長距離の波動伝播が可能となる。
  宇宙船の大気突入時 (space ship during atmosphere entry) に通信ができなくなるのも、宇宙船のまわりにプラズマができるためである。
  プラズマの密度を測定する手段としてマイクロ波干渉計が良く用いられる (microwave interferometry for density measurements)。これはプラズマを透過した時の位相の変化から密度を求める手法である (phase variation of the wave penetrating a plasma)。正常波の屈折率の二乗 (squared refractive index of ordinary wave) は $N^2 = 1 - \Pi_e^2/\omega^2$ であるが、入射するマイクロ波の周波数 (microwave frequency)ω が $\omega \gg \Pi_e$ を満たすほど十分高ければ (for sufficiently high frequency)、屈折率は (refractive index)
  $$N = \sqrt{1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_e e^2}{2m_e\epsilon_0\omega^2} \tag{216}$$
  となる。マイクロ波の位相は経路積分 (path integral)$2\pi\int\frac{dx}{\lambda} = \int k dx$ で表されるので、プラズマが存在する時と存在しない時の同じ経路での位相の差 (phase difference between with and without plasma cases)$\Delta\phi$ は
  $$\Delta\phi = \int k_0 dx - \int k dx = k_0\int(1-N)dx \approx k_0\int\frac{n_e e^2}{2m_e\epsilon_0\omega^2}dx = \frac{k_0 e^2}{2m_e\epsilon_0\omega^2}\int n_e dx \tag{217}$$
  となり、この手法で（視線）線積分密度 (line integrated density)$\int n_e dx$ が得られる。
- R 波 L 波の応用 (application of R- and L-waves)
  磁場のあるプラズマ中で磁場方向に伝搬する波の偏波を考える (consider the polarization of wave propagating along magnetic fields)。磁場の向きを (direction of magnetic fields)z 方向とし、伝搬方向 (propagation direction) を z 方向、偏波方向 (polarization direction)（電場 (electric field) の方向）を x 方向とする。波の周波数が十分高く、$\omega \gg \Pi_e,\ |\Omega_e|$ とする。この時
  $$\begin{aligned} K_\perp &\approx 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \\ K_X &\approx \frac{\Pi_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}\frac{\Omega_e}{\omega} \approx \frac{\Pi_e^2\Omega_e}{\omega^3} \end{aligned} \tag{218}$$
  磁場に平行に伝搬する波である (wave propagating along magnetic fields)R 波、L 波の屈折率の二乗 (squared refractive index)R、L は
  $$\begin{aligned} R \equiv (N_\parallel^2) &= K_\perp + K_X = 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} + \frac{\Pi_e^2\Omega_e}{\omega^3} \\ L \equiv (N_\parallel^2) &= K_\perp - K_X = 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} - \frac{\Pi_e^2\Omega_e}{\omega^3} \end{aligned} \tag{219}$$
  となる。x 方向に偏波した状態は直線偏波であるが (linearly polarized)、これは左回り円偏波と右回り円偏波の合成 (summation of left- and right-hand circularly polarized) と見なすことができる。この場合は、R 波と L 波の合成 (summation of R- and L-waves) と見なすことができる。プラズマ中を

伝搬した時にこの二つの波の位相関係が同じであれば偏波方向は変わらないが、位相が異なれば偏波方向は回転する (their phase difference induces rotation of the polarization)。そこで位相差 (phase difference)ϕ を求めると

$$\begin{aligned}
\phi &= k_0 \int \sqrt{R}dx - k_0 \int \sqrt{L}dx \\
&= k_0 \int \left\{ \sqrt{1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} + \frac{\Pi_e^2 \Omega_e}{\omega^3}} - \sqrt{1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} - \frac{\Pi_e^2 \Omega_e}{\omega^3}} \right\} dx \\
&\approx k_0 \int 2 \times \frac{1}{2} \frac{\Pi_e^2 \Omega_e}{\omega^3} dx \\
&= \frac{k_0}{\omega^3} \int \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon} \frac{eB}{m_e} dx
\end{aligned} \tag{220}$$

となる。したがって、ϕ は $\int n_e(x)B(x)dx$ に比例 (proportional) する。この方法はプラズマ中の磁場を求める数少ない方法の一つである (a method to obtain magnetic field strength)。ここで R 波と L 波の伝搬後の位相が ϕ ずれる時に、偏波方向が $\phi/2$ だけ回転することを示す。それぞれの電場は (each electric field)、式 (201) から

$$\begin{aligned}
R \text{ 波}:& E_x = E_0, \quad E_y = iE_0 \\
L \text{ 波}:& E_x = E_0, \quad E_y = -iE_0
\end{aligned} \tag{221}$$

と表せる。この時、伝搬前 (before the propagation) では、R 波と L 波の合成は、

$$\begin{aligned}
E_x &= E_0 + E_0 = 2E_0 \\
E_y &= iE_0 - iE_0 = 0
\end{aligned} \tag{222}$$

となり、x 方向に偏波した直線偏波である (linearly polarized along x)。時間的にな因子 $e^{-i\omega t}$ を考えて E_0 を $E_0 e^{-i\omega t}$ と置き換えて表記すれば、偏波方向が変わらずに時間的に振動することが分かることに注意。伝搬後 (after the propagation) は、R の位相が $+\phi/2$、L 波の位相が $-\phi/2$ と変化するとすると

$$\begin{aligned}
E_x &= E_0 e^{+i\phi/2} + E_0 e^{-i\phi/2} = 2E_0 \cos\phi/2 \\
E_y &= iE_0 e^{+i\phi/2} - iE_0 e^{-i\phi/2} = 2E_0 \sin\phi/2
\end{aligned} \tag{223}$$

となり、偏波方向が $\phi/2$ だけ回転していることが分かる (rotation of polarization by angle $\phi/2$)。

8 波と粒子の相互作用 (Wave-particle interaction)

波の持つ電場は振動 (oscillating electric field) しており、止まっている粒子に対しては仕事をしない。しかしながら，粒子が運動していて、粒子から見て波の作る電場が常に一定であれば、粒子は系統的な加速 (systematic acceleration)、あるいは減速 (deceleration) を受ける。ここでは，磁力線に平行方向の加速 (parallel particle acceleration) を引き起こすランダウ減衰 (Landau damping) について述べる。

8.1 Landau 減衰

磁力線の向き (magnetic field)（z 方向）に進む静電波 (electrostatic wave) と z 方向に速度 (velocity)v_0 で走る粒子 (particle) の相互作用 (interaction) を考える。ただし得られる結果は磁場に依存しない。この時、電

場、磁場、粒子の速度、加速度は平行である (electric and magnetic fields, particle velocity and acceleration are parallel)。波の位相速度 (phase velocity)ω/k と粒子の速度 v_0 が近いと、粒子から見たときの電場はほぼ一定となり、粒子は大きく加速、減速される。波動電場 (wave field) を $E = E \times \cos(kz - \omega t)$ とし、粒子の速度 (particle velocity) を $v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$ と展開する (expand)。0 次の項 (0th order) は

$$v = v_0, \quad z_0 = \int v_0 dt = z_{00} + v_0 t$$

１次の項 (1st order) は

$$\begin{aligned} \dot{v_1} &= \frac{qE(z_0)}{m}\ , \qquad \left(z_1 = \int v_1 dt\right) \\ &= \frac{qE}{m}\cos(kv_0 t + kz_{00} - \omega t) \\ &= \frac{qE}{m}\cos(\alpha t + \phi_0) \end{aligned} \tag{224}$$

となる。ただし、

$$\alpha \equiv kv_0 - \omega, \quad \phi_0 \equiv kz_{00}$$

とする。ここで、$\alpha \sim 0$ の粒子 (particle) は、相互作用の時間が長く (long interaction time)、重要である。後で、速度分布関数をかけて積分する（平均をとる）(averaged over velocity distribution function) が、$\alpha \sim 0$、すなわち $v \sim \omega/k$ が積分に寄与する (contribute to the average)。ϕ_0 は初期位相 (initial phase)、初期位置 (initial position) を表し、後で、$0 \sim 2\pi$ の領域で平均をとる (averaged)。v_1、z_1 を時間積分 (time integral) をして求めると

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{qE}{m}\frac{\sin(\alpha t + \phi_0) - \sin\phi_0}{\alpha} \\ z_1 &= \frac{qE}{m}\left(\frac{\cos\phi_0 - \cos(\alpha t + \phi_0)}{\alpha^2} - \frac{\sin\phi_0}{\alpha}t\right) \end{aligned} \tag{225}$$

同様にして、１次＋２次は (the 1st and the second terms)

$$\begin{aligned} \dot{v_1} + \dot{v_2} &= \frac{qE(z_0 + z_1)}{m} = \frac{qE}{m}\cos(\alpha t + \phi_0 + kz_1) \\ &\quad (\text{ここで、}z_1\text{は微小量であり、}kz_1 \ll 1\text{ とする (assumption)}) \\ &\sim \frac{qE}{m}\left(\cos(\alpha t + \phi_0) - \sin(\alpha t + \phi_0)kz_1\right) \end{aligned} \tag{226}$$

よって、

$$\begin{aligned} \dot{v_2} &= -\frac{qE}{m}\sin(\alpha t + \phi_0)kz_1 \\ &= -\frac{q^2E^2}{m^2}k\sin(\alpha t + \phi_0) \times \left(\frac{\cos\phi_0 - \cos(\alpha t + \phi_0)}{\alpha^2} - \frac{\sin\phi_0}{\alpha}t\right) \end{aligned} \tag{227}$$

一方、運動エネルギーの変化は (time derivative of the kinetic energy)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) &= vm\dot{v} = v_0 m\dot{v_1} + v_1 m\dot{v_1} + v_0 m\dot{v_0} \\ &= v_0 qE\cos(\alpha t + \phi_0) \\ &+ \frac{q^2E^2}{m}\cos(\alpha t + \phi_0)\frac{\sin(\alpha t + \phi_0) - \sin\phi_0}{\alpha} \\ &- kv_0\frac{q^2E^2}{m}\sin(\alpha t + \phi_0)\left(\frac{\cos\phi_0 - \cos(\alpha t + \phi_0)}{\alpha^2} - \frac{\sin\phi_0}{\alpha}t\right) \end{aligned} \tag{228}$$

ここで、ϕ_0 に関して平均 (average) $\langle\rangle$ をとると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) &= \frac{q^2E^2}{2m}\left(-\frac{\omega\sin\alpha t}{\alpha^2}+\frac{kv_0\cos\alpha t}{\alpha}t\right)\\ &\quad (kv_0=\alpha+\omega t \text{ を用いて})\\ &= \frac{q^2E^2}{2m}\left(-\frac{\omega\sin\alpha t}{\alpha^2}+t\cos\alpha t+\frac{\omega t\cos\alpha t}{\alpha}\right)\end{aligned} \tag{229}$$

となる。さらに分布関数 (distribution function) $f(v_0)$ をかけて速度で積分する $\int\times f(v_0)dv_0$ ことによってプラズマが全体として受け取るエネルギーが求められる (to obtain the whole energy the plasma get from the wave)。

上式の第 2 項、第 3 項は第 1 項に比べて小さく無視できる事を示す (the 2nd and 3rd terms can be neglected as shown in the following)。α を変数とする分布関数 $g(\alpha)$ を導入する。

$$\begin{aligned}f(v_0)=f\left(\frac{\alpha+\omega}{k}\right)&=g(\alpha)\\ \int f(v_0)dv_0=\frac{1}{k}\int g(\alpha)d\alpha&=1\end{aligned} \tag{230}$$

第 2 項の積分 (integral of the 2nd term) は

$$\frac{1}{k}\int g(\alpha)t\cos\alpha t d\alpha=\frac{1}{k}\int g(x/t)\cos x dx \quad (x\equiv\alpha t) \tag{231}$$

であるが、$t\to\infty$ で、ゼロとなる。第 3 項の積分 (integral of the 3rd term) は

$$\frac{\omega}{k}\int\frac{g(\alpha)t\cos\alpha t}{\alpha}d\alpha=\frac{\omega}{k}\int\frac{t}{x}g(x/t)\cos x dx \tag{232}$$

であるが、$\cos x/x$ は奇関数 (odd function) であり、$g(\alpha)$ の偶関数 (even function) 部分は積分に寄与しない。$g(\alpha)$ の奇関数 (odd function) 部分は積分に寄与するが、$t\to\infty$ で、寄与はゼロとなる。従って、第 1 項の寄与のみを考えて

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=-\frac{q^2E^2}{m}\frac{1}{k}\int g(\alpha)\frac{\omega\sin\alpha t}{\alpha^2}d\alpha \tag{233}$$

となる。この積分には $\alpha\sim0$ が寄与する (contribute)。従って、$g(\alpha)$ を $\alpha\sim0$ ($v_0\sim(\omega/k)$ の周りで

$$g(\alpha)=f(v)\sim f(\omega/k)+\alpha\frac{dv}{d\alpha}\frac{\partial f}{\partial v}=f(\omega/k)+\frac{\alpha}{k}\frac{\partial f}{\partial v}$$

と展開し，積分すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=-\frac{q^2E^2}{2m}\frac{\omega}{k}\frac{\partial f}{\partial v}\int\frac{\sin\alpha t}{\alpha}d\alpha=-\frac{q^2E^2}{2m}\frac{\omega}{k}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{|k|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=-\frac{\pi q^2E^2}{2m|k|}\frac{\omega}{k}\frac{\partial f}{\partial v} \tag{234}$$

となる。従って、分布関数の勾配の正負 ($\frac{\partial f}{\partial v}><0$) によりエネルギーのやり取りの向きが交代する。マクスウエル分布のように勾配が負の場合、エネルギーは増加し、粒子は波動からエネルギーを得る。これをランダウ減衰 (Landau damping) とよぶ。反対の場合、波は粒子からエネルギーを得て増幅される。これをランダウ増幅 (Landau amplification) と呼ぶ。

ランダウ減衰を導く過程で、無衝突を仮定している。一方、z_1 は微小量であり、$kz_1\ll1$ と仮定しており、$kz_1>1$ となる前に衝突が起きないと、上記の導出は正しくないことに注意。